Exercice

On définit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ comme suit :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}^*, u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}$$

Étudier la nature de la série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} \sin\left(\frac{2\pi p u_n}{q}\right)$$

où $p, q \in \mathbf{N}^*$.

Proposition de corrigé

On remarque déjà que (u_n) est une suite à valeurs entières. Ainsi, si $q|p$, tous les termes de la série valent 0 et on a trivialement convergence. Plaçons-nous donc dans le cas contraire, on peut prendre sans perte de généralité $p \wedge q = 1$.

Montrons tout d'abord que la série ne converge pas absolument. On montre par une récurrence triviale que deux termes consécutifs de la suite sont toujours premiers entre eux. Ainsi, si $q \mid u_n$, alors $q \nmid u_{n+1}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit u_{2n}, soit u_{2n+1}, ne sont pas divisibles par q. Alors l'un des deux est plus grand que $\dfrac{m}{2n+1}$ où

$$m = \min_{\substack{n\in\mathbf{Z}\\ q\nmid n}} \left|\sin\left(\frac{2\pi p n}{q}\right)\right|$$

Ainsi dans la série des modules on peut regrouper les termes 2 à 2 et les minorer par les termes d'une série divergente. Donc il n'y a pas convergence absolue.

Par contre, la série converge conditionellement. Pour montrer cela intéressons-nous à une somme partielle et sommons par parties :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} \sin\left(\frac{2\pi p u_n}{q}\right) = \frac{a_N}{N+1} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$$

en posant

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{2\pi p u_k}{q}\right)$$

Si on montre que a_n est bornée, alors

$$\frac{a_N}{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \text{ et } \frac{a_n}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ce qui montre la convergence de (S_n), donc de la série de départ. (Attention, ce n'est pas parce que la série qui apparaît dans la transformation d'Abel est absolument convergente que la série de départ l'est.)

On va montrer mieux : en fait, a_n est périodique.

La suite u_n vérifie

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} \text{ où } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

d'où

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'étude de (u_n) modulo q se ramène à l'étude des puissances de A^n dans $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$.

$A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ et $\det A = 1$ donc $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. Soit $\bar{A}$ la projection canonique de A dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})$, c'est un élément de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})$. Dans ce groupe fini, $\bar{A}$ a un ordre fini ω. Donc u_n est ω-périodique modulo q.

De plus, u_n se prolonge naturellement en une suite indicée par $\mathbf{Z}$ vérifiant la même relation de récurrence. On montre que $u_{-1} = -1$ puis que la suite u est impaire.

Comme la fonction $x \mapsto \sin\left(\dfrac{2\pi p x}{q}\right)$ est impaire et q-périodique i.e. ne dépend que de la classe de x dans $\mathbf{R}/q\mathbf{Z}$, la suite $\left(\sin\left(\dfrac{2\pi p u_k}{q}\right)\right)_{k\in\mathbf{N}}$ est ω-périodique et en sommant sur 2 périodes entre $-\omega$ et $\omega - 1$, on trouve qu'elle est de moyenne nulle. Donc (a_n) est ω-périodique bornée. Ce qui prouve le résultat.