Soutenance de stage MPRO 2015–2016

NGUYỄN Lê Thành Dũng (ENS Ulm)
Sous la supervision de
Christoph DÜRR (LIP6) *et* NGUYỄN Kim Thắng (IBISC)

Vendredi 7 octobre 2016

Contexte

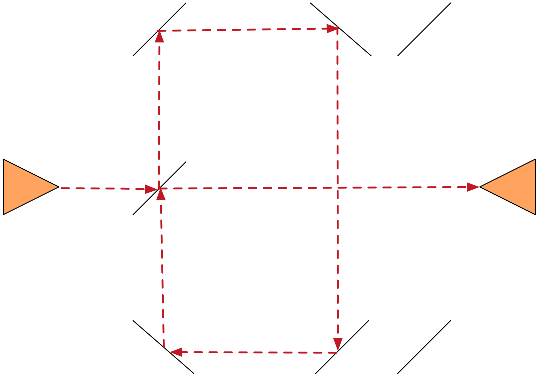
- Stage de recherche au LIP6 (Jussieu), équipe RO
  - Encadrant : Christoph Dürr
  - Ainsi que Nguyễn Kim Thắng de l'IBISC (Université d'Évry-Val-d'Essonne)
- Deux problèmes traités
- Labyrinthe de miroirs
  - Application des couplages parfaits généraux
  - Liens avec la logique linéaire
- Forêt de Steiner avec coûts sur les sommets
  - Algorithme d'optimisation *online*
  - Approche primale-duale

Section 1

Labyrinthes de miroirs

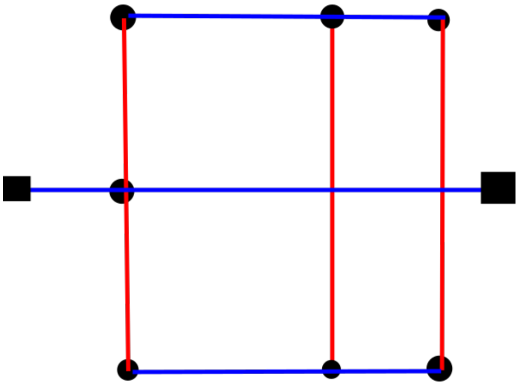
Le problème

- Orienter les miroirs (±45°) pour guider le laser jusqu'à l'arrivée



- « Aucune solution polynomiale n'est connue pour ce problème »
  - Christoph Dürr et Jill-Jênn Vie. *Programmation efficace*. ellipses, mar. 2016. URL : http://tryalgo.org/, Chapitre 15

Modèle : graphe bicolore

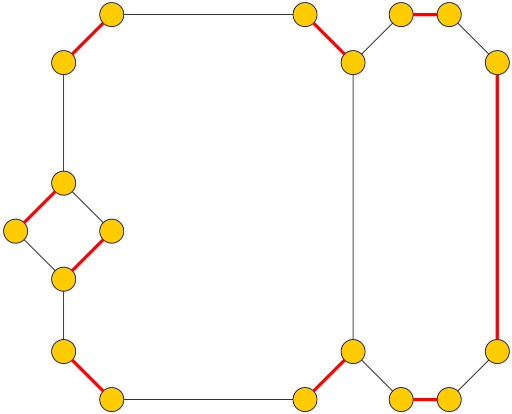


- Deux types d'arêtes : horizontales et verticales
- Graphe 2-*edge-colored*

Chemins alternés

- Trajectoire valide du laser = chemin *alterné*…
  - …sans *arêtes* répétées (miroirs à **2** faces)
  - …sans *sommets* répétés (miroirs à **1** face)
- Problèmes de recherche de chemin déjà étudié
  - Réductions au couplage parfait !
  - Solution en temps linéaire
- Jørgen Bang-Jensen et Gregory Gutin. « Alternating cycles and paths in edge-coloured multigraphs : A survey ». In : *Discrete Mathematics* 165-166 (1997), p. 39–60. doi : 10.1016/S0012-365X(96)00160-4. url : http://dx.doi.org/10.1016/S0012-365X(96)00160-4

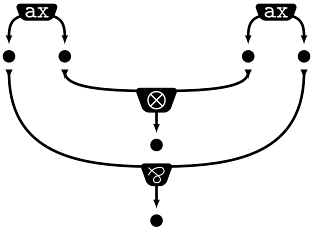
Réduction pour les miroirs à deux faces



- Arêtes « orthogonales » = couplage *quasi-parfait*
- On cherche un *chemin augmentant*
  - ≃ chercher un couplage parfait (attention, cycles impairs !)
- Arêtes « diagonales » = orientation prescrite des miroirs

Logique linéaire et réseaux de preuve (1)

- Écriture graphique des démonstrations en logique linéaire



- Preuve correcte $\Leftrightarrow$
  pas de *cycle* passant ≤ 1 fois par chaque paire d'arêtes
  - arêtes entrantes pour $⅋$
- Trajet du laser = chemin passant ≤ 1 fois par chaque paire d'arêtes
  - Arêtes de même direction sur un même miroir

Logique linéaire et réseaux de preuve (2)

- Correction d'un réseau de preuve $\simeq$ unicité d'un couplage parfait
- Compréhension « purement combinatoire » de critères de correction logique
- Une ouverture possible :
  - L'unicité du couplage *biparti* est *NL*-complète
  - La correction des réseaux de preuve aussi
  - $\longrightarrow$ unicité du couplage général $\in NL$?

Section 2

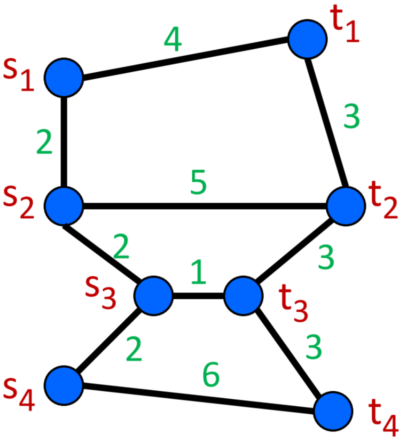
Forêt de Steiner online

Variantes du problème (1)

- Graphe $G = (V, E)$, requêtes $(s_1, t_1), \dots, (s_k, t_k) \in V^2$
- Sous-graphe de coût min où s_i est relié à t_i $\forall i$
- Acheter des *arêtes* ou des *sommets*
- Version *online* :
  - Les arêtes arrivent une par une
  - Solution réalisable à chaque instant
  - Achats irréversibles

Variantes du problème (2)

- Un exemple offline avec coûts sur les arêtes :



Variantes du problème (3)

- Garanties de performance connues :
  - (n sommets, k terminaux)

	Arêtes pondérées	Sommets pondérés
Offline (approx.)	$O(1)$	$O(\log k)$
Online (compétitivité)	$O(\log n)$	$O(\mathrm{polylog}(n, k))$

- Question : arriver à $O(\log n \log k)$ pour sommets+online
  - Ce serait (quasiment ?) optimal
  - Approche : mélanger les algorithmes sommets+offline et arêtes+online
  - Pour l'instant, pas de résultats

Inspirations

- Arêtes+online :
  - Jiawei Qian et David P. Williamson. « An $O(\log n)$-Competitive Algorithm for Online Constrained Forest Problems ». In : *Automata, Languages and Programming - 38th International Colloquium, ICALP 2011, Zurich, Switzerland, July 4-8, 2011, Proceedings, Part I*. Sous la dir. de Luca Aceto, Monika Henzinger et Jirí Sgall. T. 6755. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2011, p. 37–48. isbn : 978-3-642-22005-0
- Sommets+offline :
  - MohammadHossein Bateni, MohammadTaghi Hajiaghayi et Vahid Liaghat. « Improved Approximation Algorithms for (Budgeted) Node-weighted Steiner Problems ». In : *CoRR* abs/1304.7530 (2013)
- Les deux utilisent une méthode *primale-duale*

Formulation linéaire (1)

- Coûts sur les *arêtes* :

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \sum_{e \in E} w_e x_e & & \\
\text{s. c.} \quad & \sum_{e \in \partial(S)} x_e \quad \geq 1 & & \forall S \in \mathscr{S} \\
& x_e \in \{0,1\} & & \forall e \in E
\end{aligned}
$$

- $\partial(S) = \{(u,v) \in E \mid u \in S,\, v \notin S\}$: cut-set
- $\mathscr{S} = \bigcup \mathscr{S}_j$: coupes à traverser
  - $\mathscr{S}_j = \{S \subset V \mid |S \cap \{s_j, t_j\}| = 1\}$

Formulation linéaire (2)

- Coûts sur les *sommets* :

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{v \in V} w_v x_v \\ \text{s. c.} \quad & \sum_{v \in \Gamma(S)} x_v \geq 1 && \forall S \in \mathscr{S} \\ & x_v \in \{0, 1\} && \forall v \in V \end{aligned}$$

- $\Gamma(S) = \{u \in V \mid \exists s \in S : (s, u) \in V\}$: voisinage
- $\mathscr{S} = \bigcup \mathscr{S}_j$
  - $\mathscr{S}_j = \{S \subset V \mid |S \cap \{s_j, t_j\}| = 1\}$

Dual de la relaxation linéaire

$$
\begin{array}{llll}
\text{Max} & \displaystyle\sum_{S \in \mathscr{S}} y_S & & \\
\text{s. c.} & \displaystyle\sum_{S \mid e \in \partial(S)} y_S & \leq w_e & \forall e \in E \\
& y_S \geq 0 & & \forall S \in \mathscr{S}
\end{array}
$$

- Nombre exponentiel de contraintes primales / variables duales
- Pas résolu directement, employé pour *concevoir* un algorithme
- Algorithme primal-dual : construit simultanément
  - une solution primale entière
  - une solution duale fractionnaire *réalisable*

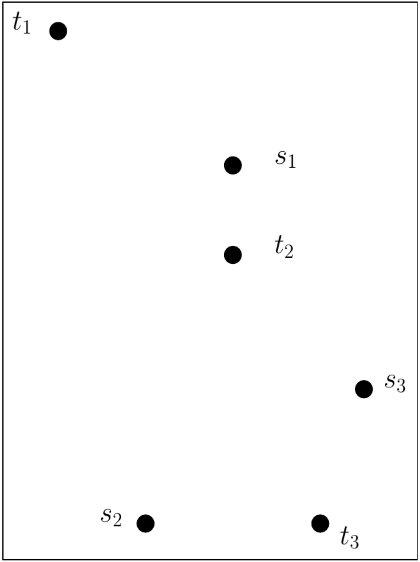
Un algorithme primal-dual offline (1)

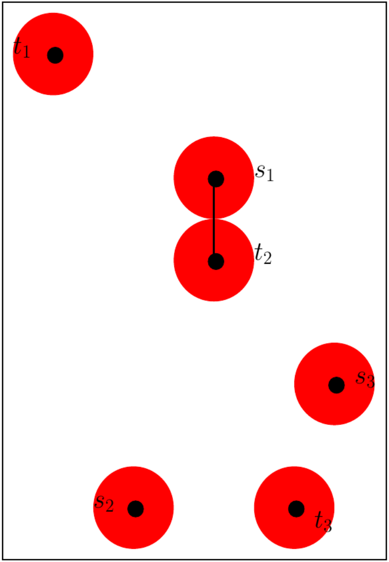
Algorithme pour la forêt de Steiner offline avec coûts sur les arêtes

procédure STEINER($(G = (V, E), (s_1, t_1), \dots, (s_k, t_k))$)
$y_j \leftarrow 0$ pour $j = 1, \dots, n$
$F \leftarrow \emptyset$
tant que les paires (s_i, t_i) ne sont pas toutes reliées dans (V, F) **faire**
tant que $\sum_{S|e\in\partial(S)} y_S < w_e$ $\forall e \in E \setminus F$ **faire**
augmenter y_S *uniformément* pour tous les $S \in \mathscr{S}$ qui sont des *composantes connexes* de (V, F)
$F \leftarrow F \cup \{e\}$ pour $e \in E \setminus F$ tel que $\sum_{S|e\in\partial(S)} y_S = w_e$
enlever les arêtes inutiles dans F
renvoyer F

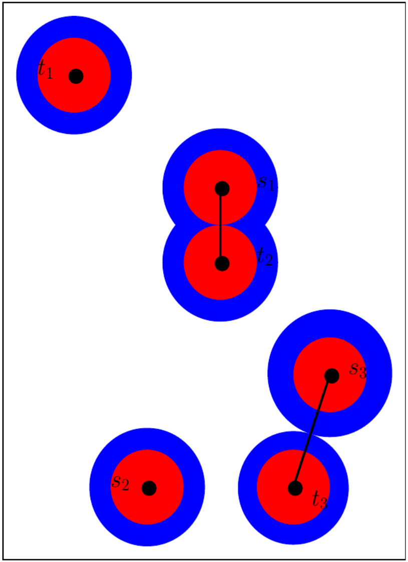
- Remarque : F satisfait la condition d'écarts complémentaires

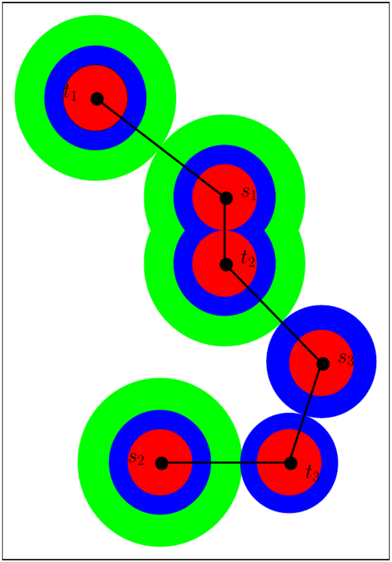
Un algorithme primal-dual offline (2)





Un algorithme primal-dual offline (3)





Un algorithme primal-dual offline (4)

- Nombre polynomial de $y_S > 0$
  - Algorithme en temps polynomial
- 2-approximation de la forêt de Steiner
  - Analyse : répartition du coût d'une arête entre les composantes qu'elle relie
  - Repose crucialement sur la croissance *uniforme*

Adaptation online

- Problème : comment surmonter l'absence d'uniformité quand on n'a pas toutes les requêtes en même temps ?
- Astuce : introduire une *infinité* de solutions duales (y_S^l) de niveaux $l = -\infty, \dots, +\infty$, bornées à une taille 2^l
- Une arête est achetée par la plus basse solution duale possible
- Moralement, le déséquilibre est ≤ 2