Nous allons d'abord énoncer et démontrer l'inégalité du réordonnement, puis regarder quelques applications aux séries.

Inégalité du réordonnement

Énoncé

Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ $(n \in \mathbf{N}, n \geq 2)$ des réels tels que $a_1 \leq \ldots \leq a_n$ et $b_1 \leq \ldots \leq b_n$. Alors

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Démonstration

Montrons d'abord le cas $n = 2$. Soient $(a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$ et $(b_1, b_2) \in \mathbf{R}^2$ (fixés quelconques bien évidemment), avec $a_1 \leq a_2$ et $b_1 \leq b_2$. Alors, en s'intéressant à la seule permutation non triviale de $\mathfrak{S}_2$ qui est $\sigma = (1\ 2)$,

$$\begin{aligned}(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \geq 0 &\Rightarrow a_2 b_2 - a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_1 b_1 \geq 0 \\ &\Rightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 \geq a_1 b_2 + a_2 b_1\end{aligned}$$

(ma petite sœur sait faire ça...)

Maintenant, comment conclure ? L'idée est en fait la suivante : lorsqu'on a une inversion dans une permutation de $\mathfrak{S}_n$, défaire cette inversion (en composant par une transposition) va faire augmenter (au sens large) la somme à cause du résultat précédemment démontré, ainsi les permutations qui ne sont pas l'identité soit ne maximisent pas la somme, soit ont des inversions qu'on peut enlever. Pour formaliser ça, on peut par exemple considérer, parmi les permutations qui atteignent la somme maximale (évidemment, le maximum existe), $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ qui minimise le nombre d'inversions. Si σ possède une inversion alors forcément elle a une inversion de 2 éléments adjacents, qui peuvent être défaite en diminuant strictement le nombre d'inversions sans diminuer la somme, contradiction (ce sont des propriétés bien connues du groupe symétrique, laissées en exercice au lecteur :-)). Donc $\sigma = \mathrm{id}$. Même argument à l'envers pour montrer la minoration...

Autre idée, qui a le défaut de ne pas marcher sur tous les anneaux avec une relation d'ordre compatible avec les opérations $+$ et $\times$: si on a des inégalités strictes partout, défaire une inversion augmente strictement la somme donc le maximum ne peut être atteint que pour la permutation identité. On conclut alors par un argument de densité (vive la topologie !) pour les n-uplets avec des valeurs répétées.

Note : une technique très utile en math est, pour prouver l'existence d'un objet avec certaines propriétés est de dire que c'est un minimum d'une fonction sur un ensemble (fini, compact ou autre) et de montrer que, s'il ne présentait pas ces propriétés, on pourrait faire baisser la valeur de la fonction. On pense par exemple au problème de la possibilité, pour 2 ensembles finis de même cardinal de points dans le plan, de relier 2 à 2 les points par des segments sans croisement, dont une solution (apparemment proposée par A. Marigot) est de prendre les segments qui relient en minimisant la somme des longueurs des segments.

Applications aux séries

Dans cette section f désigne une permutation quelconque de $\mathbf{N}$ (attention ce n'est plus un élément du groupe symétrique sur un ensemble fini contrairement aux σ de la section précédente).

Ex. 1 : $\sum \frac{1}{nf(n)}$

Cette série converge.

Pour montrer cela, fixons $N \in \mathbf{N}^*$ quelconque. Notons $(u_1, \ldots, u_N)$ les éléments de $f(\llbracket 1; N \rrbracket)$ dans l'ordre croissant ($u_1 < \ldots < u_N$ puisque par injectivité de f les u_n sont distincts). On a : $\forall n \in \llbracket 1; N \rrbracket, u_n \geq n$ (propriété générale des applications strictement croissantes entre 2 parties de $\mathbf{N}^*$). Alors d'après l'inégalité du réordonnement, comme les $f(n)$ sont les u_n permutés pour $1 \leq n \leq N$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \times \frac{1}{f(n)} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \times \frac{1}{u_n} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \leq \frac{\pi^2}{6}$$

or une série à termes positifs majorée est convergente...

Ex.2 : $\sum \frac{n}{f(n)^2}$

Cette série diverge.

On le voit clairement quand f est l'identité, d'où l'idée de minorer par la série harmonique. Mais si on se précipite sur la somme partielle des N premiers termes pour un N quelconque, ça ne marche pas bien. Astuce : fixons $N \in \mathbf{N}^*$ et posons $\widetilde{N} = \max f^{-1}(\llbracket 1; N \rrbracket)$ (bien entendu, $\widetilde{N} \geq N$).

Comme dans l'exemple précédent, on pose $(u_1, \ldots, u_{\widetilde{N}})$ les éléments de $f(\llbracket 1; \widetilde{N} \rrbracket)$ dans l'ordre croissant. Ici, on a $\forall n \in \llbracket 1; N \rrbracket, u_n = n$ ($\widetilde{N}$ a été choisi pour ça !). Donc par positivité des termes

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{n^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{u_n^2} \leq \sum_{n=1}^{\widetilde{N}} \frac{n}{u_n^2} \leq \sum_{n=1}^{\widetilde{N}} \frac{n}{f(n)^2}$$

(la toute dernière inégalité est celle qui utilise l'inégalité de réordonnement). La divergence vers $+\infty$ de la sous-suite des sommes partielles indicée par les $\widetilde{N}$ entraîne la divergence de la série.

Ex.3 : $\sum \dfrac{n}{f(n)^3}$

Ça ressemble fortement au deuxième exemple, cette fois-ci ça converge pour $f = \mathrm{id}$, essayons donc de majorer...ah mince dans le 2., c'était une minoration, et si on applique la majoration du réordonnement brutalement...ah ben ça marche pas. En fait la similarité est trompeuse, c'est un vicieux piège !

Étudions le problème autrement. Dans une série à termes positifs l'ordre des termes ne change ni la nature ni la somme d'une série. En inversant la permutation cela revient à étudier la série $\sum \dfrac{g(n)}{n^3}$ où g est une permutation de $\mathbf{N}^*$ ($g = f^{-1}$). Pour g l'identité, ça converge vers $\zeta(2)$, mais on peut également exhiber un g qui fasse diverger grossièrement la série : si, pour tout n pair, $g(n) = n^3$, le terme général ne tend pas vers 0. Il suffit de faire en sorte que la suite $(g(2k+1))_{k\in\mathbf{N}}$ parcoure $\mathbf{N} \setminus \{n^3 | n \in \mathbf{N}\}$ dans l'ordre croissant pour que g soit bien une bijection de $\mathbf{N}^*$ dans lui-même.

Pas d'inégalité du réordonnement là-dedans, donc. J'ai seulement inclus ça par souci d'exhaustivité pour achever tes exos de colle (l'adresse personnelle qui vient à la fin et qui ruine complètement le style du texte...)

Exo de topologie sans rapport :

Soit (E, d) un espace métrique, on note F l'ensemble des fermés non vides de E. Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} \delta\colon F \times F &\to \mathbf{R}_+ \\ (A, B) &\mapsto \sup_{x\in A} \inf_{y\in B} d(x,y) + \sup_{x\in B} \inf_{y\in A} d(x,y) \end{aligned}$$

est une métrique sur F. Il s'agit de raisonnements assez élémentaires sur les distances, pas la peine de chercher un truc tordu (mais si ça garantit l'originalité de la preuve, pourquoi pas).