



Concours national d'informatique  
Épreuve écrite d'algorithmique  
**Paris II**

Samedi 14 mars 2015



# PAS D'AMI, PAS DE CHOCOLAT



Happy Pi Day! (Ceci n'a rien à voir avec le sujet)

## 1 Préambule

Bienvenue à **Prologin**. Ce sujet est l'épreuve écrite d'algorithmique et constitue la première des trois parties de votre épreuve régionale. Sa durée est de 3 heures. Par la suite, vous passerez un entretien (20 minutes) et une épreuve de programmation sur machine (4 heures).

### Conseils

- Lisez bien tout le sujet avant de commencer.
- **Soignez la présentation** de votre copie.
- N'hésitez pas à poser des questions.
- Si vous avez fini en avance, relisez bien.
- N'oubliez pas de passer une bonne journée.

### Remarques

- Le barème est donné à titre indicatif uniquement.
- Indiquez lisiblement vos nom et prénom, la ville où vous passez l'épreuve et la date en haut de votre copie.
- Tous les langages sont autorisés, veuillez néanmoins préciser celui que vous utilisez.
- Ce sont des humains qui lisent vos copies : laissez une marge, aérez votre code, ajoutez des commentaires (**seulement** lorsqu'ils sont nécessaires) et évitez au maximum les fautes d'orthographe.
- Le barème récompense les algorithmes les plus efficaces : écrivez des fonctions qui trouvent la solution le plus rapidement possible.
- Si vous trouvez le sujet trop simple, relisez-le, réfléchissez bien, puis dites-le-nous, nous pouvons ajouter des questions plus difficiles.

## 2 Sujet

### Introduction

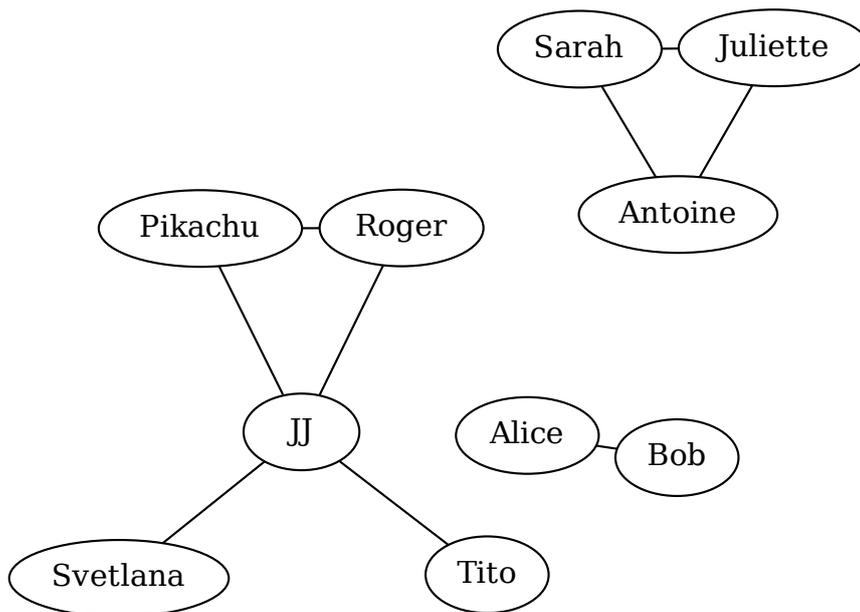
Un mois après la Saint-Valentin, il est coutume, dans certains pays d'Asie, d'offrir en retour du cadeau reçu une tablette de chocolat. Le pouvoir croissant des commerçants ayant fait évoluer les conventions sociales, on n'offre pas du chocolat uniquement à son petit ami, mais à tous ses amis<sup>1</sup>.

Le chocolat étant cependant une denrée rare et chère, toute personne ayant reçu une tablette fait l'économie d'un achat en la relayant à une autre connaissance. Une tablette peut ainsi faire un long voyage au cours d'une journée, et même repasser plusieurs fois par les mains de la même personne. Les commerçants n'ont pas réussi à instaurer totalement leur esprit capitaliste : il suffit de savoir que tous ses amis aient touché du chocolat pendant la journée, pas besoin de leur offrir à chacun une tablette personnellement.

### Partie I : Minimisation de la quantité de chocolat en circulation

Un radin de base décide de compter le nombre minimum de tablettes de chocolat à acheter dans son lycée pour que chaque groupe d'amis puisse s'offrir du chocolat.

Sur cet exemple, les relations d'amitié sont représentées par des liens :



#### Question 1

(1 point)

Combien y a-t-il de groupes d'amis différents sur ce schéma<sup>2</sup> ? (Dans un groupe d'ami, chaque membre est ami avec les autres, ou alors ami d'ami, ou ami d'ami d'ami, ou ami d'ami d'ami d'ami...)<sup>3</sup>

1. Alors qu'ils ne nous avaient même pas fait de cadeaux pour la Saint-Valentin, les radins !

2. Donc de tablettes de chocolat en liberté.

3. ou alors ami d'ami d'ami

On suppose que l'on dispose d'un tableau `amitie` de taille  $n \times n$  de booléens qui représente les relations d'amitié entre les personnes<sup>4</sup>. On suppose que les personnes sont représentées par des numéros de 0 à  $n - 1$ .

### Question 2

(1 point)

Écrire une fonction `estAmiAvec` qui prend en arguments deux entiers  $i$  et  $j$  et le tableau `amitie` et qui renvoie un booléen indiquant la présence ou non d'une relation d'amitié entre  $i$  et  $j$ .

Sarah sait que Bob est en possession d'une précieuse et convoitée tablette. Elle se demande si cette tablette peut arriver jusqu'à elle.

### Question 3

(3 points)

- (a) Comment établir si une tablette peut passer d'une personne à une autre, en passant par au plus un intermédiaire ?
- (b) Écrire une fonction qui renvoie le tableau de booléens de taille  $n \times n$  correspondant.

### Question 4

(5 points)

- (a) En s'aidant de la question précédente, écrire une fonction qui renvoie un tableau montrant pour tous  $i, j$  si la tablette peut passer de  $i$  à  $j$  en passant par un nombre  $k$  donné en argument d'intermédiaires.
- (b) Comment faire pour un nombre quelconque d'intermédiaires ? On ne demande pas d'écrire dans ses détails l'algorithme.

### Question 5

(3 points)

Écrire un algorithme permettant de calculer le nombre minimum de tablettes de chocolat en circulation, c'est à dire le nombre de groupes d'amis différents.

## Partie II : Les élèves-charnières

Certains élèves partant en stage, une question naturelle se pose : la disparition de ces points-relais va-t-elle nuire à la circulation des tablettes de chocolat, obligeant de pauvres étudiants à céder leur argent au grand capital pour s'en procurer de nouvelles ?

### Question 6

(3 points)

- (a) Écrire une fonction qui renvoie un nouveau tableau des amitiés d'où les élèves en stage, fournis sous la forme d'une liste d'indices, auront été purgés. Le tableau obtenu étant en conséquence plus petit, on se permettra de renuméroter les gens.
- (b) En vous reposant sur cette liste, écrire une fonction qui indique si le départ de certains élèves a scindé des groupes d'amis, augmentant ainsi les besoins en chocolat.

---

4. L'amitié est quelque chose de symétrique<sup>5</sup>.

5. Est-ce le cas dans la vraie vie ?

Nous voulons maintenant trouver les élèves indispensables à la bonne cohésion de leur groupe d'amis, c'est à dire, les élèves tels que s'ils partaient en stage très loin, un groupe d'amis serait divisé en deux ou plus. Appelons-les élèves-charnières<sup>6</sup>.

### Question 7

(5 points)

- (a) En vous aidant des questions précédentes, donner un algorithme simple renvoyant la liste des élèves-charnières.
- (b) Quelle est la complexité de cet algorithme ?

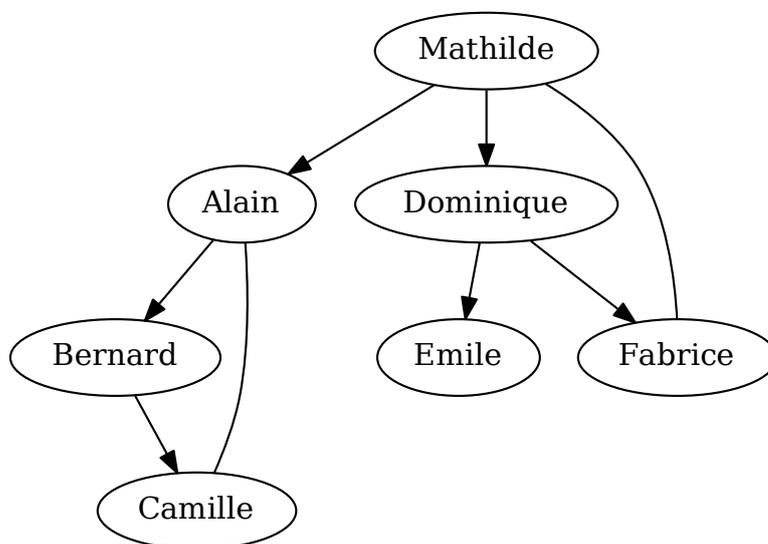
On se restreint maintenant à un unique groupe d'amis (le tableau reflétera cela), dans lequel les gens décident de mettre en place un système de distribution : une personne se dévoue pour acheter une unique énorme tablette qu'elle découpe pour partager avec certains de ses amis, qui eux-mêmes seront chargés de découper la tablette pour leurs amis n'ayant pas encore reçu de chocolat, et ainsi de suite.

### Question 8

(5 points)

Comment représenter un tel système de distribution ?

On considère maintenant ce groupe d'amis et le système de distribution qu'ils ont mis en place (les flèches indiquent le transit du chocolat, les autres liens des relations d'amitié) :



Alain sait que Camille, qui est son ami(e), recevra un bout de la tablette par l'intermédiaire de Bernard, il ne lui en offre donc pas. Camille lui reproche cela, mais il se justifie en disant qu'il savait que Bernard devrait lui offrir une partie de son chocolat.

Cela signifie aussi que Bernard aurait pu partir en stage<sup>7</sup> sans briser le groupe d'amis.

6. Ce sont des élèves clé dans ce sujet !

7. Malheureusement, il est coincé ici pour problème de visa.

Par la suite, on prendra la définition suivante d'un système de distribution *valide* :

- la transmission directe du chocolat ne peut s'effectuer qu'entre deux amis ;
- si A et B sont amis, alors soit A donne, directement ou indirectement (c'est-à-dire par des intermédiaires) une partie de son chocolat à B, soit B donne à A.

Ainsi, l'exemple précédent est valide pour cette définition.

### Question 9

(7 points)

Écrire une fonction pour tester la validité d'une distribution de chocolat, donné par la représentation que vous avez répondu pour la question précédente, relativement à un graphe des amitiés.

### Question 10

(7 points)

Montrer qu'un élève X est un élève-charnière si l'une des deux propositions suivantes est vérifiée :

- C'est celui qui a acheté la tablette et il en offre *directement* à au moins deux personnes.
- X reçoit un morceau de la tablette et, parmi ceux qui vont recevoir des bouts de sa tablette (directement ou indirectement), aucun n'est ami avec une personne en amont de X dans la chaîne de distribution.

On dispose de l'arbre représentant la chaîne de distribution et du tableau représentant les amitiés.

### Question 11

(10 points)

Écrire une fonction qui calcule un tableau 1 contenant, pour chaque personne X, la personne la plus en amont dans la chaîne de distribution qui soit amie avec une personne en aval de X (on considérera, dans le cas dégénéré, qu'une personne est amie avec elle-même).

### Question 12

(5 points)

Implémentez un algorithme efficace qui renvoie la liste des élèves-charnières.

### Question 13

(15 points)

Écrire une fonction qui, à partir du tableau des amitiés, trouve un système de distribution valide. (Il vous faudra justifier que le système obtenu est bien valide.)

## Partie bonus : foobar de chocolat, ou initiation aux mystères

Dans toute cette partie, on utilisera les notations suivantes :

- $u \rightarrow v$  si  $u$  est fournisseur direct de  $v$  dans le système de distribution
- $u \rightarrow^* v$  si  $u$  est égal, fournisseur direct, ou fournisseur indirect de  $v$
- $u \leftrightarrow v$  si  $v$  est fournisseur strictement indirect de  $u$  et qu'ils sont amis

Notre but, pour une raison mystérieuse, va être de partitionner les couples  $(u, v)$  tels que  $u \leftrightarrow v$  en deux classes  $L$  et  $R$ , de sorte que, pour toutes personnes  $u, v, w_1, w_2$  tels que  $u \rightarrow v$ ,  $v \rightarrow w_1$ ,  $v \rightarrow w_2$  :

- tous les couples  $w_1 \leftrightarrow x$  tels que  $x$  soit strictement en aval de  $1[w_2]$  soient dans une même classe ;
- tous les couples  $w_2 \leftrightarrow y$  tels que  $y$  soit strictement en aval de  $1[w_1]$  soient dans l'autre classe.

#### Question bonus 14

(20 points)

Donner deux relations  $\sim$  et  $|$  facilement calculables, entre couples  $(u, v)$  avec  $u \leftrightarrow v$ , telles qu'une partition respecte la condition précédemment énoncée si et seulement si :

- $u$  et  $v$  sont dans la même classe lorsque  $u \sim v$
- $u$  et  $v$  ne sont pas dans la même classe lorsque  $u|v$

#### Question bonus 15

(20 points)

Donner un algorithme pour construire une partition  $(L, R)$  respectant ces critères.

#### Question bonus 16

(70 points)

Donner un algorithme *en temps linéaire* pour construire une partition  $(L, R)$  respectant ces critères. Il vous faudra introduire une nouvelle approche.

#### Question bonus 17

(15 points)

Ce critère abscons caractérise une propriété du graphe des amitiés indépendantes de la logistique du chocolat que nous avons mise en place ; de quoi s'agit-il ?

#### Question bonus 18

(3.14 points)

Quelle serait votre réaction si on vous offrait du chocolat que vous avez vous-même offert ? Décrivez. (Ceci est un espace de libre expression, vous avez le droit à autant de mots que vous voulez tant que ce nombre est compris entre 300 et 301.)

# FIN

Le sujet comporte 6 pages, plus une page de garde. Les questions sont au nombre de 18, parmi lesquelles 5 questions bonus. Les questions normales sont notées sur 70 points, plus 125 points sur la partie bonus et 5 points de présentation, ce qui fait au total 200 points.<sup>8</sup>

---

8. On s'est retenu de vous faire perdre tout au long de ce sujet et on n'en peut plus...