Prologin 2017

Concours national d'informatique

Épreuve écrite d'algorithmique
Paris 2,718

Mercredi 1er mars 2017

Le nombre de Jill-Jênn

~Jill-Jênn~ d'une voix suave

1 Préambule

Bienvenue à **Prologin**. Ce sujet est l'épreuve écrite d'algorithmique et constitue la première des trois parties de votre épreuve régionale. Sa durée est de 3 heures. Par la suite, vous passerez un entretien (20 minutes) et une épreuve de programmation sur machine (4 heures).

Conseils

— Lisez bien tout le sujet avant de commencer.
— **Soignez la présentation** de votre copie.
— N'hésitez pas à poser des questions.
— Si vous avez fini en avance, relisez bien.
— N'oubliez pas de passer une bonne journée.

Remarques

- Le barème est donné à titre indicatif uniquement.
- Indiquez lisiblement vos nom et prénom, la ville où vous passez l'épreuve et la date en haut de votre copie.
- Tous les langages sont autorisés, veuillez néanmoins préciser celui que vous utilisez.
- Ce sont des humains qui lisent vos copies : laissez une marge, aérez votre code, ajoutez des commentaires (**seulement** lorsqu'ils sont nécessaires) et évitez au maximum les fautes d'orthographe.
- Le barème récompense les algorithmes les plus efficaces : écrivez des fonctions qui trouvent la solution le plus rapidement possible.
- Si vous trouvez le sujet trop simple, relisez-le, réfléchissez bien, puis dites-le-nous, nous pouvons ajouter des questions plus difficiles.

2 Sujet

Le sujet a pour but l'étude des mesures de distance ou de connectivité au Dr. Jill-Jênn Vie sur le graphe social. Dans une première partie, on s'intéresse au modèle historique du *nombre d'Erdős*, qu'on adapte pour définir le *nombre de Jill-Jênn naturel*. Les parties II et III sont indépendantes et proposent deux modèles plus précis qu'on appellera respectivement *nombre de Jill-Jênn de première espèce* et *de seconde espèce*. Enfin, la quatrième partie se propose de comparer quantitativement ces définitions du nombre de Jill-Jênn.

Définitions et notations On appelle *graphe* un ensemble fini (appelé ensemble des sommets, noté V) muni d'une relation binaire irréflexive symétrique ; on note $G = (V, E)$. Les graphes considérés dans ce sujet auront pour ensemble de sommets l'ensemble des *êtres humains*, c'est-à-dire des individus de l'espèce *Homo sapiens*. Le *graphe social* est celui donné par la relation de connaissance mutuelle. Le *graphe des publications* est celui donné par la relation de co-publication ; autrement dit, il s'agit de la 2-section de l'*hypergraphe des publications*, dont les arêtes sont les publications (il s'agit donc de relations k-aires symétriques où k est le nombre de co-auteurs de l'article considéré).

Un être humain prénommé Jill-Jênn sera appelé un *Jill-Jênn*. On peut montrer, et on admettra ici, que tout Jill-Jênn a pour nom de famille Vie et pour date de naissance le 27 février 1990. Par abus de notation, on identifiera le graphe social non enraciné à celui enraciné en un Jill-Jênn.

Si A est un anneau commutatif intègre, l'anneau des matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients dans A sera noté $\mathcal{M}_n(A)$. L'application déterminant est notée $\det : \mathcal{M}_n(A) \to A$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, son pseudo-inverse (de Moore-Penrose) sera noté M^+. Enfin, on notera $\mathcal{D}'_c(\Omega)$ l'espace des distributions à support compact sur Ω.

Question 1 (1 point)

> Décrire un choix de structures de données pour représenter le graphe social et l'hypergraphe des publications. Attention, ces structures seront utilisées tout au long du sujet.

Partie I

Le nombre d'Erdős est défini comme suit :

— Le mathématicien Paul Erdős se voit attribuer un nombre d'Erdős égal à 0 ;

— chaque autre co-auteur d'une publication avec Paul Erdős a un nombre d'Erdős de 1 ;

— et ainsi de suite : quelqu'un qui a publié un article avec une personne de nombre d'Erdős n, et qui n'a pas lui-même un nombre nombre d'Erdős au plus n, a pour nombre d'Erdős $n + 1$.

Il s'agit donc de la distance à Paul Erdős sur le graphe des publications. Toute personne qui ne se situe pas dans la composante connexe de Paul Erdős a pour nombre d'Erdős $+\infty$.

Question 2 (1 point)

> Sachant que Jill-Jênn Vie a publié un livre avec Roger Mansuy, ce dernier ayant un nombre d'Erdős de 3, que peut-on en déduire sur le nombre d'Erdős de Jill-Jênn ?

Question 3 (1 point)

> Écrire une fonction qui prend en entrée l'hypergraphe des publications et détermine la liste des personnes de nombre d'Erdős au plus 2.

Question 4 (3 points)

> (a) Écrire une fonction qui calcule le nombre d'Erdős d'un être humain, à partir de la donnée de cet être humain et de l'hypergraphe des publications.
>
> (b) Écrire une fonction qui calcule les nombres d'Erdős de *tous* les êtres humains.

Question 5 (1 point)

> Expliquer brièvement en quoi le graphe des publications n'est pas adapté à une définition satisfaisante du nombre de Jill-Jênn, en vous appuyant sur la liste des publications de Jill-Jênn Vie.

On appelle désormais *nombre de Jill-Jênn naturel* d'un être humain x la longueur minimale d'un chemin reliant x à un Jill-Jênn sur le graphe social. Ce nombre est noté $JJ_0(x)$. Il est clair que les algorithmes précédents permettent également de calculer le nombre de Jill-Jênn naturel.

Partie II

Nous cherchons ici une notion de distance qui prend en compte la multiplicité des raisons de connaître Jill-Jênn. En effet, le Jill-Jênn sauvage a tendance à s'impliquer dans un grand nombre d'activités.

Question 6 (3 points)

> (a) Proposer un algorithme pour trouver le nombre maximum de chemins disjoints (c'est-à-dire tels que deux de ces chemins n'impliquent pas une même personne intermédiaire) entre Jill-Jênn et un être humain x sur le graphe social.

> (b) Montrer que si x ne connaît pas directement Jill-Jênn, ce nombre est égal au nombre minimum d'êtres humains dont la mort serait nécessaire pour que x ne soit plus dans la composante connexe de Jill-Jênn (x et Jill-Jênn étant supposés provisoirement immortels pour cette question).

Plutôt que d'utiliser directement ce nombre, nous allons poser, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et x une personne, $\widetilde{JJ}_1^k(x)$ le nombre minimal de personnes intermédiaires à faire intervenir au total pour réaliser k chemins disjoints entre Jill-Jênn et x. S'il n'existe pas k tels chemins, $\widetilde{JJ}_1^k(x)$ vaudra $+\infty$.

Question 7 (2 points)

> Écrire une fonction calculant $\widetilde{JJ}_1^k(x)$ en fonction de k, x et du graphe social.

Enfin, on définit les *nombres de Jill-Jênn de première espèce*

$$JJ_1^k(x) = \frac{\widetilde{JJ}_1^k(x) + k}{k^2}$$

Question 8 (1 point)

> Que vaut $JJ_1^1(x)$?

Partie III

Cette partie est consacrée à une modélisation par circuits électriques. Appelons *circuit social* le circuit électrique dessinant le graphe social avec des résistances de 1 Ω sur les arêtes. On appelle alors *nombre de Jill-Jênn de seconde espèce* de la personne x, noté $JJ_2(x)$, la résistance équivalente entre Jill-Jênn et x. Autrement dit, si on impose une différence de potentiel de 1 V entre Jill-Jênn et x, $JJ_2(x)$ est l'inverse de l'intensité en ampères du courant injecté dans Jill-Jênn par le générateur de tension.

Commençons par un cas simple. Les *dipôles série-parallèle* (qu'on abrégera en *dipôles S-P*) sont des circuits avec deux pôles distingués dont l'ensemble est défini inductivement comme suit :

- une résistance est un dipôle S-P dont les pôles sont les extrémités ;
- à partir d'un dipôle S-P de pôles s et t et d'un dipôle S-P de pôles s' et t', on peut former un nouveau dipôle S-P de pôles s et t' en prenant l'union disjointe et en identifiant t et s' (branchement en série) ;
- à partir d'un dipôle S-P de pôles s et t et d'un dipôle S-P de pôles s' et t', on peut former un nouveau dipôle S-P de pôles $s = s'$ et $t = t'$ en prenant l'union disjointe et en identifiant s et s' d'une part, t et t' de l'autre (branchement en parallèle).

Question 9 (1 point)

> Rappeler les règles d'addition des résistances en série et en parallèle.

Question 10 (5 points)

> Proposer un algorithme permettant de savoir si un circuit avec deux pôles donnés est un dipôle S-P et, le cas échéant, d'obtenir une construction inductive du dipôle.
> *Indication : ceci peut être fait en temps linéaire.*

Question 11 (2 points)

> Écrire une fonction calculant $JJ_2(x)$ en supposant que le circuit social est un dipôle S-P de pôles x et Jill-Jênn. On utilisera l'algorithme de la question précédente comme sous-routine.

Question 12 (6 points)

> Montrer que le circuit social est un dipôle S-P pour au moins un choix de pôles si et seulement si le graphe social n'admet pas comme mineur le graphe complet sur quatre sommets K_4.

Cette condition étant en pratique très loin d'être vérifiée, nous allons étudier une autre approche pour le calcul de $JJ_2(x)$.

On considère maintenant que le circuit social est branché à un dispositif extérieur, de sorte qu'un courant de i_x ampères entre en chaque sommet x. On pose $\vec{i}$ le vecteur de coordonnées i_x où x parcourt l'ensemble des êtres humains, et on définit de même $\vec{v}$ dont les coordonnées sont les potentiels électriques v_x en chaque personne. *Le potentiel étant défini à une constante additive près, on prendra* $v_{\text{Jill-Jênn}} = 0$.

Question 13 (3 points)

> (a) Rappeler les lois de Kirchhoff et la loi d'Ohm dans les circuits électriques.
> (b) Établir une relation linéaire $L\vec{v} = \vec{i}$ où L est une matrice carrée symétrique réelle de noyau $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\{(1, \ldots, 1)\}$.

Question 14 (4 points)

> (a) Exprimer $\vec{v}$ en fonction de $\vec{i}$ et du pseudo-inverse L^+ de L.
> (b) En déduire un algorithme pour le calcul des nombres de Jill-Jênn de seconde espèce.

Il se trouve que ces nombres sont liés à des objets combinatoires que nous introduisons ici. Une *distribution* est un sous-graphe connexe du graphe social, contenant tous les êtres humains et enraciné en Jill-Jênn ; on peut la considérer comme un choix de routage de l'information dans le réseau de contacts de Jill-Jênn. Elle est dite *à support compact* si elle minimise le nombre d'arêtes.

Question 15 (10 points)

> Montrer que si x est une connaissance directe de Jill-Jênn, alors $JJ_2(x)$ est la probabilité qu'une distribution à support compact tirée uniformément contienne l'arête entre Jill-Jênn et x.
> *Indication : on pourra chercher à établir dans un premier temps une relation entre les mineurs principaux de L et le nombre de distributions à support compact.*

Question 16 (3 points)

> Proposer un algorithme pour tirer aléatoirement une distribution à support compact suivant une loi uniforme. (On s'appuiera sur les résultats des deux questions précédentes.)

Partie IV

Nous voulons maintenant comparer les quantités $JJ_0(x)$, $JJ_1^k(x)$ et $JJ_2(x)$.

Question 17 (4 points)

> (a) Montrer que si on coupe des liens de connaissance entre personnes, les nombres de Jill-Jênn de seconde espèce augmentent (au sens large).
> (b) En déduire que pour toute personne x et tout $k \in \mathbb{N}^*$, $JJ_2(x) \leq JJ_1^k(x)$.

Question 18 (2 points)

> (a) Comparer JJ_0 et JJ_2.
> (b) Peut-on établir une inégalité entre JJ_0 et JJ_1^k pour $k > 1$?

Il est possible de construire des graphes avec des résistances à la racine arbitrairement grandes. Cependant, une étude de la structure spécifique des graphes sociaux munis d'un Jill-Jênn permet d'établir de *second théorème de Jill-Jênn* (ou théorème des degrés de séparation) : toute personne a un nombre de Jill-Jênn de seconde espèce strictement inférieur à 1. Ce résultat est conjecturé sous-optimal, et la détermination du supremum des résistances équivalentes d'extrémité Jill-Jênn, nommé *constante de Jill-Jênn*, reste un problème ouvert, avec une minoration connue de $\cos(2\pi/7)$. Rappelons aussi que le *premier théorème de Jill-Jênn* affirme que toute personne qui entend parler de Jill-Jênn le rencontre dans les 15 jours qui suivent.

Partie bonus

Question bonus 19 (1 point)

> (a) Calculez vos nombres de Jill-Jênn et vérifiez expérimentalement le second théorème de Jill-Jênn.
>
> (b) Avez-vous un nombre d'Erdős–Bacon–Jill-Jênn fini ?
>
> (c) Le premier théorème de Jill-Jênn s'est-il appliqué à votre vie ?

Question bonus 20 (2 points)

> Joseph Marchand, ami de longue date de Jill-Jênn, constate que sa vie sentimentale est mal parenthésée : en effet, la durée de sa liaison avec Natalie Portman n'est pas incluse dans celle de son mariage, et la réciproque n'est pas non plus vraie.
>
> (a) Quels modèles de calcul permettent de tester le bon parenthésage de la vie ? (Question à choix multiple)
>
>   (a) Les automates finis
>
>   (b) Les automates à pile
>
>   (c) Les machines de Turing
>
>   (d) Les machines de Turing terminant en temps $o(n \log n)$
>
> (b) Proposez un algorithme à Joseph pour déterminer l'altération minimale de la vérité nécessaire pour passer de sa vie à un mot bien parenthésé.

Question bonus 21 (1 point)

> Votre vie est-elle plutôt mal configurée, mal optimisée ou mal parenthésée ?

Fin

Le sujet comporte 7 pages, plus une page de garde. Les questions sont au nombre de 21, parmi lesquelles 3 questions bonus. Les questions normales sont notées sur 53 points, et les questions bonus rapportent au total 4 points, plus 3 points de présentation, ce qui fait au total 60 points.