Soient $0 < b \leq a$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ décroissante telle que $t \mapsto t^{2a} f(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$.

Question 1 : Montrer qu'il existe $K \geq 0$ tel que, quelque soit f,

$$\left(\int_0^{+\infty} f(t)t^{a+b}dt\right)^2 \leq K \left(\int_0^{+\infty} f(t)t^{2a}dt\right)\left(\int_0^{+\infty} f(t)t^{2b}dt\right)$$

Réponse : Prendre $K = 1$ avec Cauchy-Schwarz.

Question 2 : Montrer que $\forall c \in]0, a]$, $t \mapsto t^{2a} f(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$ et

$$-\left(\int_0^{+\infty} f'(t)t^{2c+1}dt\right) = (2c+1)\left(\int_0^{+\infty} f(t)t^{2c}dt\right)$$

Réponse : Comme $\forall t \geq 0$, $t^{2c+1}f'(t) \leq 0$ par décroissance de f il suffit de vérifier la convergence de l'intégrale en tendant vers $+\infty$ pour avoir l'intégrabilité. Par une simple IPP on se ramène à vouloir montrer que

$$\lim_{t\to+\infty} t^{2c+1}f(t) = 0 \ i.e.\ f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{2c+1}}\right)$$

Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tels que $t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\forall n \in \mathbf{N}, f(t_n) \geq \dfrac{\varepsilon}{t_n^{2c+1}}$. Par décroissance,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall t \in [t_{n-1}, t_n],\ f(t) \geq \frac{\varepsilon}{t_n^{2c+1}}$$

On en déduit

$$\forall n \in \mathbf{N}, \int_0^{t_n} f(t)t^{2c}dt \geq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} t^{2c}\frac{\varepsilon}{t_{k+1}^{2c+1}}dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2c+1}\left(1 - \left(\frac{t_k}{t_{k+1}}\right)^{2c+1}\right)$$

L'intégrabilité de $f(t)t^{2c}$ implique que cette série à termes positifs converge. Dans ce cas son terme général tend vers 0 et comme $\ln(x) \underset{x\to1}{\sim} x - 1$, en utilisant la sommation des équivalents, la série est de même nature que

$$\sum \ln\left(\frac{t_k}{t_{k+1}}\right) \to +\infty$$

(par téléscopage), contradiction.

Question 3 : Montrer que la constante optimale dans la question 1 est

$$K = \frac{(1+2a)(1+2b)}{(1+a+b)^2}$$

Réponse : Il faut d'abord montrer que cette valeur de K marche, c'est-à-dire montrer l'inégalité

$$(1+a+b)^2\left(\int_0^{+\infty} f(t)t^{a+b}dt\right)^2 \leq (1+2a)\left(\int_0^{+\infty} f(t)t^{2a}dt\right)(1+2b)\left(\int_0^{+\infty} f(t)t^{2b}dt\right)$$

c'est-à-dire, en utilisant la question 2,

$$\left(\int_0^{+\infty}(-f'(t))t^{a+b+1}dt\right)^2 \leq \left(\int_0^{+\infty}(-f'(t))t^{2a+1}dt\right)\left(\int_0^{+\infty}(-f'(t))t^{2b+1}dt\right)$$

C'est encore du Cauchy-Schwarz...
Remarque : on a prouvé que

$$x \mapsto (1+x)\left(\int_0^{+\infty} f(t)t^x dt\right)$$

est une fonction log-convexe, mais comme elle n'est pas forcément $\mathcal{C}^2$ (problème d'intégrabilité en 0) essayer de montrer la log-convexité par le calcul n'est pas judicieux.

Il reste à montrer l'optimalité de la constante. En prenant la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

f est décroissante positive et

$$\int_0^{+\infty} f(t)t^x dt = \frac{1}{1+x}$$

ce qui permet de réaliser le cas d'égalité avec la nouvelle constante K. Cependant, $f \notin \mathcal{C}^1$, mais on peut l'approximer avec une suite de splines cubiques décroissantes de façon à avoir convergence de l'intégrale. Ainsi on montre que la constante est optimale même si le cas d'égalité n'est pas forcément atteint.