Un exercice sur les séries : trouver une caractérisation des séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ convergentes à termes positifs telles que

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} R_n^2 \text{ où } R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

Premièrement, nous pouvons remarquer que cela revient à chercher R_n, en effet on retrouve u_n à partir de R_n : $u_n = R_{n-1} - R_n$.

On peut réécire la relation comme suit : $R_{n-1} - R_n \sim R_n^2$. R_n étant le reste de $\sum_{n\geq 0} u_n$, (R_n) est une suite à termes positifs décroissante vers 0. Donc $R_n = o(1)$ ce qui entraîne $R_n^2 = o(R_n)$. Ainsi, $R_{n-1} \sim R_n$, d'où

$$R_{n-1} - R_n \sim R_n^2 \sim R_{n-1}R_n \Rightarrow \frac{R_{n-1} - R_n}{R_{n-1}R_n} \sim 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{R_n} - \frac{1}{R_{n-1}} = 1$$

Le théorème de Cesàro donne :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{R_n} - \frac{1}{R_0}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{R_n} \sim n \Rightarrow R_n \sim \frac{1}{n}$$

Finalement, comme $u_n \sim R_n^2$, on trouve :

$$u_n \sim \frac{1}{n^2}$$

Montrons maintenant que cette condition nécessaire est en fait suffisante.

Par comparaison série-intégrale, on a, pour tout $n \geq 2$:

$$\frac{1}{n} = \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n+1}$$

donc la série de terme général $v_n = \frac{1}{n^2}$ vérifie $R_n \sim \dfrac{1}{n}$, on a bien $v_n \sim R_n^2$.

Si une autre série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est équivalente à $v_n = \dfrac{1}{n^2}$ alors en appliquant le théorème de sommation des équivalents pour les séries convergentes à termes positifs, qui donne l'équivalence des restes, on retrouve le même résultat. $\square$