Énoncé de l'exercice :

Soit E un espace euclidien. Soient $f : E \to E$ et $\delta \in \mathbf{R}_+$ tels que

$$\forall (x,y) \in E^2, |\,\|f(x)-f(y)\| - \|x-y\|\,| \leq \delta$$

On pose, pour $x \in E$, $g_n(x) = \dfrac{f(nx)}{n}$.

Montrer que :

1. $\exists \phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ croissante tq $(g_{\phi(n)}(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge pour tout $x \in E$;
2. $h : x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} g_{\phi(n)}(x)$ est une isométrie.

Solution :

Je vais d'abord rappeler ce qu'on avait déjà établi :

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n(x) - g_n(y)\| = \|x-y\|$$

(preuve : dans la relation $|\|f(x)-f(y)\| - \|x-y\|\,| \leq \delta$, substituer nx à x et ny à y puis diviser par n ; $\dfrac{\delta}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ...). En particulier comme $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(0) = 0$ (c'est évident) on a

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n(x)\| = \|x\|$$

(on peut rendre ça rigoureux avec les ϵ et l'inégalité triangulaire...)

Conséquence : pour tout $x \in E$, $(g_n(x))$ est bornée et admet donc une sous-suite convergente (théorème de Bolzano-Weierstrass). On peut même faire mieux : pour toute famille finie de vecteurs de E, il existe ϕ telle que $(g_{\phi(n)})$ converge ponctuellement sur cette famille (il suffit de composer des extractions successives). E étant euclidien, il existe une BON $(e_1, ..., e_d)$ ($d = \dim E$) et on sait donc qu'il existe $\phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ croissante telle que pour tout $i \in [1,d]$, $(g_{\phi(n)}(e_i))$ converge.

En fait, le ϕ qui marche pour cette BON va marcher pour tout $x \in E$, (la preuve arrive dans quelques paragraphes !), on va donc se mettre à noter h la fonction h définie dans le 2 pour ce ϕ là. Si l'on note D_h le domaine de définition de h (dont on veut montrer que $D_h = E$) on a, en reprenant les égalités précédentes et en appliquant la continuité de la norme,

$$\forall (x,y) \in D_h^2, \|h(x)-h(y)\| = \|x-y\| \text{ et } \|h(x)\| = \|x\|$$

En utilisant l'identité de polarisation

$$\forall (x,y) \in E^2, \langle x,y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

on obtient :

$$\forall (x,y) \in D_h^2, \langle h(x), h(y)\rangle = \langle x,y\rangle$$

Conséquence immédiate : $(h(e_1), ...h(e_n))$ est une BON (on sait déjà à ce stade que $h(e_1), ..., h(e_n)$ sont bien définies).

On considère maintenant $x \in E$ fixé quelconque, et $(g_{\psi(n)}(x))$ une sous-suite convergente de $(g_{\phi(n)}(x))$ (c'est-à-dire qu'il existe $\chi : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \nearrow$ telle que $\psi = \phi \circ \chi$). Soit $i \in [1, d]$. En reprenant le raisonnement précédent sur h en remplaçant ϕ par ψ, et sachant que $(g_{\psi(n)}(e_i))$, qui est une sous-suite de la suite convergente $(g_{\phi(n)}(e_i))$, converge vers $\lim_{n\to\infty} g_{\phi(n)}(e_i) = h(e_i)$, on a

$$\left\langle \left(\lim_{n\to\infty} (g_{\psi(n)}(x)) \right), h(e_i) \right\rangle = \langle x, e_i \rangle$$

Les composantes de $\lim_{n\to\infty} (g_{\psi(n)}(x))$ sont donc indépendantes de ψ ce qui signifie que $(g_{\phi(n)}(x))$ admet une seule valeur d'adhérence. Or cette suite est bornée, donc d'après le corollaire du théorème de Bolzano-Weierstrass (qui marche aussi bien dans $\mathbf{R}^n$ que dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, même si la démo en sup n'a été faite que pour ces 2 derniers cas particuliers), $(g_{\phi(n)}(x))$ est convergente. Donc $x \in D_h$.

Conclusion : $D_h = E$ (inclusion réciproque évidente), ce qui répond à la question 1.

Mais on a également établi, dans cette preuve, que h laisse invariant le produit scalaire... C'est donc un automorphisme orthogonal (contrairement à la préservation de la norme, ici, nul besoin d'hypothèse préalable de linéarité), la question 2 tombe directement.