Équations différentielles non linéaires : quelques exercices

Une équation du 1^er^ ordre

Montrer que la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} y' &= y^2 - x \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

est définie au moins sur $\mathbf{R}_+$.

Indication : s'intéresser à la parabole $y^2 = x$.

Un système autonome du 2^e^ ordre

Montrer que la solution maximale de

$$\begin{aligned} y'' &= 1 - 3y^2 \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

est définie sur $\mathbf{R}$ et périodique.

Corrigé 1

Soit f la solution maximale, elle existe, est unique, et est définie sur un voisinage $]a,b[$ de 0 (théorème de Cauchy-Lipschitz).

Montrons d'abord que pour tout $x \in [0,b[$, $f(x)^2 \leq x$. (C'est-à-dire que le graphe de f reste dans le domaine convexe délimité par la parabole $y^2 = x$). Comme $f'(0) = f(0)^2 - 0 = 0$, $f(x) = o(x)$ quand $x \to 0$. Ainsi $\exists \eta \in \mathbf{R}_+^* / \forall x \in]-\eta,\eta[, |f(x)| \leq |x|$, donc pour $0 \leq x < \min(1,\eta)$, on a $|f(x)| \leq x \leq \sqrt{x}$, ce qui signifie que l'inégalité voulue est bien vérifiée sur un voisinage à droite de 0.

Pour étendre ce résultat à tout $[0,b[$ supposons par l'absurde que $\{x \geq 0 | f(x)^2 > x\}$ soit non vide, alors sa borne inférieure x_0 existe dans $\mathbf{R}_+$, et on a d'après le résultat précédent $x_0 > 0$. x_0 est adhérent à $\{x \geq 0 | f(x)^2 > x\}$, ainsi qu'à $[0,x_0[$ où f vérifie $f(x)^2 \leq x$, par continuité de f^2 et en passant à la limite sur les inégalités on a $f(x)^2 = x$. Cela entraîne $f'(x_0) = 0$ d'où $(f^2)'(x_0) = 0$ (dérivation des fonctions composées) i.e. $f(x)^2 = x_0 + o(x - x_0)$. Ceci impliquerait que sur un voisinage à gauche de x_0, $f(x)^2 > x$, on aboutit à une contradiction avec le fait que x_0 soit un minorant des x qui vérifient cette inégalité.

Maintenant que nous connaissons les variations de f nous pouvons conclure sur son domaine de définition. Supposons que $b < +\infty$. f est bornée sur $[0,b[$: $\forall x \in [0,b[, |f(x)| \leq \sqrt{x} < \sqrt{b}$. La dérivée de f est donc aussi bornée (elle s'exprime en fonction de f et de x) donc en employant le théorème des accroissements finis et le critère de Cauchy on montre l'existence d'une limite de f en b. f se prolonge donc par continuité en b, c'est aussi le cas pour f' qui est une fonction continue de f et de x, donc f admet un prolongement $\mathcal{C}^1$ en b (théorème du prolongement dérivable). En recollant f avec une solution de l'équation différentielle avec les bonnes conditions initiales en b, définie sur un voisinage de b, on construit une solution qui contredit la maximalité de f définie sur $]a,b[$.

Conclusion : $b = +\infty$, autrement dit f est défine sur $\mathbf{R}_+$. $\square$

Remarque : pour montrer que f admettait une limite en b il suffisait de constater que f était décroissante pour $x \geq 0$. Cependant la méthode employée ici est plus générale, elle sert à démontrer la remarque 8.2.2 du Jimmy (une solution maximale de $x' = f(t,x)$ lorsque $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ n'est pas bornée au voisinage d'une éventuelle borne finie de l'intervalle maximal de définition).

Corrigé 2

En multipliant l'équation par y' et en intégrant grâce aux conditions initiales on obtient

$$\frac{1}{2}y'^2 = y - y^3 = y(1-y^2)$$

Par conséquent toute solution du problème de Cauchy vérifie, en tout point de son intervalle de définition :

$$y(1-y^2) \geq 0 \Leftrightarrow y \leq -1 \text{ ou } 0 \leq y \leq 1$$

L'image de y étant connexe (fonction continue sur un intervalle i.e. une partie connexe de $\mathbf{R}$) elle est incluse dans l'une des composantes connexes de $]-\infty,-1]\cup[0,1]$, comme $y(0)=0$ on a en fait $0 \leq y \leq 1$. y étant bornée, y' l'est aussi, donc en reprenant l'argument utilisé pour le 1^{er} exercice, la solution maximale est définie sur $\mathbf{R}$.

Dans la suite, on note y la solution maximale. En $x=0$, on a :

- $y(0)=0$ donc y atteint un minimum ($0 \leq y \leq 1$), d'où $y'(0)=0$
- $y''(0) = 1 - 3\times 0^2 = 1 > 0$

Sur un voisinage à droite de 0 on a donc $y' \geq 0$. L'intégrale première du mouvement établie au début s'écrit alors sur ce voisinage :

$$y' = \sqrt{2y(1-y^2)}$$

équation du 1^{er} ordre à variables séparables qui s'intègre en

$$\int_0^y \frac{du}{\sqrt{2u(1-u)(1+u)}} = x$$

Or, la fonction intégrée ici, à valeurs positives, est dans $L^1(]0,1[)$ puisque

$$\frac{1}{\sqrt{2u(1-u)(1+u)}} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2u}} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{2u(1-u)(1+u)}} \underset{u\to 1}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{1-u}}$$

et que la fonction est continue sur $]0,1[$. Ainsi, sur le domaine de validité de l'expression établie précédemment, comme $y \leq 1$, on a

$$x \leq \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{2u(1-u)(1+u)}} < +\infty$$

on ne peut donc pas avoir $y' \geq 0$ sur tout $\mathbf{R}_+$.

Posons alors $x_0 = \inf\{x > 0 | y'(x) < 0\}$, on a $x_0 > 0$ et $y'(x_0) = 0$. Donc $y(x_0)(1-y(x_0)^2) = 0 \Rightarrow y(x_0) \in \{-1,0,1\}$. On sait déjà que $y=-1$ est impossible. Si $y(x_0)=0$, alors comme y est croissante sur $[0,x_0]$ on aurait sur cet intervalle $y=0$, ce qui est incompatible avec l'équation différentielle $y''=1-3y^2$. Forcément, $y(x_0)=1$.

Remarquons maintenant que y est paire. En effet la fonction $x \mapsto y(-x)$ est solution du problème de Cauchy, par unicité de la solution maximale $y(x) = y(-x)$.

Au point $-x_0$, on a donc les conditions :

- $y(-x_0) = y(x_0) = 1$
- $y'(-x_0) = -y'(x_0) = 0$

Les conditions initiales sont les mêmes en $x = -x_0$ et $x = x_0$, donc l'invariance par translation du système autonome et l'unicité de la solution maximale d'un problème de Cauchy permettent de conclure à la périodicité de y, $2x_0$ étant une période (c'est même la plus petite période).