Divers exercices mathématiques

1 Propriétés topologiques d'un ensemble de polynômes scindés

Dans tout ce qui suit, $n \in \mathbf{N}^*$ est fixé (quelconque !).

On note Ω_n l'ensemble des polynômes scindés à racines simples sur $\mathbf{R}$ de degré n. On a

$$\Omega_n = \left\{ a\prod_{i=1}^{n}(X - x_i) \middle| a \in \mathbf{R}^*, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n, i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j \right\}$$

L'espace topologique ambiant est $\mathbf{R}_n[X]$, c'est un espace vectoriel réel de dimension finie. On travaille avec l'unique topologie d'espace séparé qui soit compatible avec la structure d'espace vectoriel. Toutes les normes sont équivalentes et donnent cette topologie.

1.1 Ω_n est un ouvert

Soit $P = a\prod_{i=1}^{n}(X - x_i) \in \Omega_n$.

Choisissons $y_0, \ldots, y_n \in \mathbf{R}$ tels que $y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < ... < x_n < y_n$, et posons $\eta = \min_{0 \leq k \leq n} |P(y_k)| > 0$.

En considérant la norme de la convergence uniforme sur $[y_0, y_n]$, il est clair qu'il existe un voisinage V de P tel que $\forall Q \in V, \forall k \in [\![0, n]\!], |P(y_k) - Q(y_k)| \leq \dfrac{\eta}{2} < |P(y_k)| \Rightarrow P(y_k)Q(y_k) > 0$. Comme P est à racines simples, il change de signe à chaque x_i et donc les $(P(y_k))_{0 \leq k \leq n}$ sont de signes alternés, donc les $(Q(y_k))_{0 \leq k \leq n}$ aussi.

Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à Q sur chaque segment $[y_i, y_{i+1}]$ permet de conclure à l'existence de n racines distinctes dans $\mathbf{R}$ pour $Q \in V$, d'où $V \subset \Omega_n$. Ω_n est un voisinage de tous ses points, c'est un ouvert.

1.2 Adhérence de Ω_n dans $\mathbf{R}_n[X]$

1.2.1 $\overline{\Omega_n}$ contient les polynômes scindés de degré n

Tout d'abord, nous allons montrer que $\overline{\Omega_n}$ contient tous les polynômes scindés de degré exactement n, y compris ceux à racines multiples.

Soit $P = a\prod_{i=1}^{n}(X - x_i) \in \mathbf{R}_n[X] \setminus \mathbf{R}_{n-1}[X]$ scindé. Considérons la suite de polynômes $\left(P_m(X) = a\prod_{i=1}^{n}\left(X - \left(x_i + \dfrac{i}{m}\right)\right)\right)_{m\in\mathbf{N}^*}$. Comme les coefficients d'un polynôme de degré et coefficient dominant fixés sont des fonctions polynomiales symétriques, donc continues, des racines, les coefficients de P_m tendent vers ceux de P donc (P_m) converge vers P (prendre par exemple la norme 1 sur les coefficients dans $\mathbf{R}_n[X]$). Reste à montrer que les racines des polynômes (P_m) sont distinctes, ce qui est en fait le cas à partir d'un certain rang. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, avec $i \neq j$:

- si $x_i = x_j$: on a $\forall m \in \mathbf{N}^*, i \neq j \Rightarrow x_i + \dfrac{i}{m} \neq x_j + \dfrac{j}{m}$
- si $x_i \neq x_j$: $\mathbf{R}$ étant un espace topologique séparé x_i et x_j admettent 2 voisinages disjoints V_i et V_j, et, par convergence des suites, $\exists M_{ij} \in \mathbf{N}^* : \forall m \geq M_{ij}, x_i + \dfrac{i}{m} \in V_i$ et $x_j + \dfrac{j}{m} \in V_j \Rightarrow x_i + \dfrac{i}{m} \neq x_j + \dfrac{j}{m}$

En posant $M = \max\limits_{i\neq j} M_{ij}$, on a $\forall m \geq M, P_m \in \Omega_n$. Ainsi $(P_m)_{m\geq M}$ est une suite dans Ω_n qui converge vers P. On en conclut $P \in \overline{\Omega_n}$.

1.2.2 Tous les polynômes scindés ou constants de $\mathbf{R}_n[X]$ sont dans $\overline{\Omega_n}$

Soit $P \in \mathbf{R}_n[X]$ scindé ou constant non nul. La suite $\left(\left(\dfrac{X}{m}+1\right)^{n-\deg P} P\right)_{m\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de polynômes scindés de degré n, qui sont des éléments de $\overline{\Omega_n}$ d'après le résultat précédent. Cette suite converge vers P. $\overline{\Omega_n}$ étant fermé par définition de l'adhérence, on a $P \in \overline{\Omega_n}$. Pour le polynôme nul, la suite $\left(\dfrac{X^n}{m}\right)_{m\in\mathbf{N}^*}$ fait l'affaire …

1.2.3 Inclusion réciproque

Nous allons montrer que l'ensemble E des polynômes constants ou scindés de $\mathbf{R}_n[X]$ est bien l'adhérence de Ω_n. On a déjà $E \subset \overline{\Omega_n}$, reste l'inclusion réciproque.

Pour cela il suffit de montrer que E est fermé : en effet dans ce cas, comme $\Omega_n \subset E$, on a $\overline{\Omega_n} \subset E$ car $\overline{\Omega_n}$ est le plus petit fermé contenant Ω_n. Cela revient à dire que $F = \mathbf{R}_n[X] \setminus E$ est ouvert.

Soit $P \in F$, P est un polynôme non scindé sur $\mathbf{R}$ et non constant. D'après le théorème fondamental de l'algèbre, il possède donc une racine complexe non réelle z_0. Il est possible de choisir un voisinage compact K de z_0 disjoint de $\mathbf{R}$ (car $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ est ouvert) sur lequel P ne s'annule pas (les racines de P sont finies et donc discrètes). Notons :

- $M = \inf_{z \in \partial K} |P(z)|$; $|P|$ atteint ses bornes sur ∂K compact où P ne s'annule pas donc $M > 0$
- $N(Q) = \sup_{z \in K} |Q(z)|$; on peut montrer que c'est une norme

La boule ouverte pour N centrée en P de rayon $\frac{M}{3}$, que l'on nommera V, est un voisinage de P dans $\mathbf{R}_n[X]$. De plus, pour $Q \in V$, on a :

$$\forall z \in \partial K, |Q(z)| \geq |P(z)| - |P(z) - Q(z)| > \frac{2M}{3} > \frac{M}{3} \geq |Q(z_0) - P(z_0)| = |Q(z_0)|$$

Ainsi le minimum de Q sur K ne peut être atteint sur sa frontière, Q admet donc un minimum local dans l'intérieur de K. Q n'étant pas constant (sinon le minimum serait aussi atteint sur ∂K), d'après le principe du module minimum, ce minimum local est un zéro de la fonction holomorphe $z \mapsto Q(z)$. Ainsi Q a une racine complexe non réelle : c'est un polynôme non constant et non scindé sur $\mathbf{R}$ donc dans F. En fin de compte on a obtenu $V \subset F$. Donc F est ouvert, c'est gagné !

1.2.4 Conclusion

L'adhérence de Ω_n dans $\mathbf{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes constants ou scindés sur $\mathbf{R}$.

2 Normes en dimension finie, boules et convexité

Dans toute cette section, E est un $\mathbf{R}$-evn et $\dim E = n < \infty$.

2.1 Convexité de la boule unité

On dispose de la propriété suivante : si $f : E \to \mathbf{R}$ est convexe, c'est-à-dire que $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$, alors pour tout $a \in \mathrm{R}$, $f^{-1}(]-\infty, a])$ et $f^{-1}(]-\infty, a[)$ sont convexes (démonstration laissée en exercice). On en déduit, grâce à la convexité de la norme, que les boules unités ouvertes et fermées pour toutes les normes sont convexes ; plus généralement toute boule est convexe (toute boule est semblable à une boule unité, la similitude étant affine elle préserve la convexité).

2.2 La boule unité en norme 1

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, on définit la norme 1 associée

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

On va montrer la propriété suivante : la boule unité fermée pour cette norme est l'enveloppe convexe des vecteurs de la base $(e_1, \dots, e_n)$ et de leurs opposés, ensemble que l'on notera $F = \bigcup_{i \in [\![1,n]\!]} \{e_i, -e_i\}$

Il est déjà clair que $F \subset \overline{B}(0,1)$, et la boule unité étant convexe on a l'inclusion $\text{Conv}(F) \subset \overline{B}(0,1)$. Réciproquement soit $x \in \overline{B}(0,1)$. Alors

$$\exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ et } \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq 1 \Rightarrow 1 - \sum_{i=0}^{n} |x_i| \geq 0$$

Remarquons que 0_E, isobarycentre de e_1 et $-e_1$, est dans $\text{Conv}(F)$. Par convexité, tout barycentre de points de $F \cup \{0\}$ à coefficients positifs est dans $\text{Conv}(F)$. En écrivant

$$x = \left(1 - \sum_{i=0}^{n} |x_i|\right).0_E + \sum_{i=0}^{n} |x_i| e'_i \text{ avec } e'i = \begin{cases} e_i & \text{si } |x_i| \geq 0 \\ -e_i & \text{sinon} \end{cases}$$

On voit que $x \in \text{Conv}(F)$ ce qui achève la preuve de l'inclusion réciproque.

2.3 Caractérisation des boules unités

Si une partie $A \subset E$ est la boule unité fermée pour une certaine norme sur E alors :

- elle est fermée (continuité de la norme) et bornée (définition de la bornitude) donc compacte ($\dim E < \infty$)
- elle est convexe
- elle est symétrique par rapport à l'origine (i.e. $x \in A \Leftrightarrow -x \in A$)
- elle est d'intérieur non vide (en effet elle contient la boule unité ouverte)

Nous allons montrer la réciproque : les compacts convexes d'intérieur non vide symétriques par rapport à l'origine sont des boules unités avec la bonne norme.

Pour $A \subset E$ satisfaisant ces hypothèses, parachutons la norme en question :

$$N(x) = \inf \left\{ \lambda \in \mathbf{R}_+^* \middle| \frac{1}{\lambda}.x \in A \right\}$$

Montrons d'abord que c'est une norme :

- $N(0) = 0$ est évident : $0 \in A$ (A est non vide, convexe, et symétrique par rapport à 0, et 0 se trouve sur tout segment reliant un point et son opposé) donc $\forall \lambda \in \mathbf{R}_+^*, \frac{0}{\lambda} \in A$ et comme $\inf \mathbf{R}_+^* = 0 \dots$
- Si $N(x) = 0$ pour un certain $x \in E$: la caractérisation séquentielle de la borne inférieure (qui nécéssite l'axiome du choix, rappelons-le) donne l'existence d'une certaine suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui converge vers 0

par valeurs positives telle que $\forall n \in \mathbf{N}, \dfrac{x}{\lambda_n} \in A$. Si l'on avait $x \neq 0$, $\left\| \dfrac{1}{\lambda_n} x \right\| = \dfrac{\|x\|}{\lambda} \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$ ce qui contredirait le caractère borné de A.

- La propriété multiplicative de la norme se fait à l'encéphalogramme plat ... (attention quand même, pour un coefficient négatif il faut utiliser la symétrie de A par rapport à l'origine)
- Inégalité triangulaire : soient $(x, y) \in E^2$.
  Si $x = 0$ ou $y = 0$ c'est bon. Sinon, dans la définition de $N(x)$, la borne inférieure est en fait un minimum : en considérant (λ_n) telle que $\lambda_n \xrightarrow[n \to \infty]{} N(x)$ et $\left\{ \dfrac{x}{\lambda} \right\}_{n=0}^{\infty} \subset A$, comme A est fermé, $\dfrac{x}{N(x)} \in A$ en passant à la limite. Il en va de même pour y.
  On a alors :
  $$\frac{x+y}{N(x)+N(y)} = \frac{N(x)}{N(x)+N(y)} . \frac{x}{N(x)} + \frac{N(y)}{N(x)+N(y)} . \frac{y}{N(y)} \in A,$$
  en effet A est convexe et on reconnaît l'expression d'un barycentre de points de A. D'où $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ puisque la borne inférieure est un minorant.

Il est ensuite facile de montrer que A est la boule unité pour la norme N :

- Pour tout $x \in A$, $\dfrac{x}{1} \in A$ d'où $N(x) \leq 1$;
- Réciproquement si $N(x) \leq 1$ ($x \in E$), on a vu que si $x = 0$ alors $x \in A$ et sinon $\dfrac{x}{N(x)} \in A$ donc $x = (1 - N(x)).0 + N(x).\dfrac{x}{N(x)} \in A$ par convexité.

Par double inclusion on a le résultat.

2.4 Application : théorème de Banach-Schauder en dimension finie

Le théorème à montrer est le suivant : une application linéaire f entre 2 evn est surjective si, et seulement si, l'image de tout ouvert est un ouvert (on dit que f est une application ouverte). Ici, on s'intéressera au cas où l'espace d'arrivée est de dimension finie (le cas général utilise le théorème de Baire dans sa démonstration).

Un sens de l'équivalence est évident : si f est une application ouverte, alors son image est un ouvert qui contient une boule ouverte centrée en 0, elle contient une base de l'espace d'arrivée (à partir d'une base quelconque on peut faire une homothétie pour obtenir une base dans la boule). Donc f est surjective par linéarité.

Dans l'autre sens, l'énoncé peut se réduire à un problème plus simple :

- il suffit de montrer que l'image de tout voisinage d'un point est un voisinage de l'image du point ;
- on peut se ramener au point 0 puisque les translations sont des homéomorphismes d'un evn

– les boules ouvertes formant une base des voisinages de 0 on peut n'étudier que celles-ci
– en utilisant les homothéties, qui sont des homéomorphismes, finalement, on peut se limiter à l'étude de la boule unité... (mais ce n'est pas forcément utile)

La boule unité B de l'espace de départ contient une base, donc $f(B)$ contient une famille génératrice de l'espace d'arrivée, dont on peut extraire une base $(e_1, \dots, e_n)$. f étant linéaire elle préserve la convexité et la symétrie relativement à l'origine. Donc $f(B)$ contient $\mathrm{Conv}\{e_1, \dots, e_n, -e_1, \dots, -e_n\}$. C'est la boule fermée unité pour la norme 1 sur $(e_1, \dots, e_n)$, qui est un voisinage de l'origine par équivalence des normes.

3 Points rationellements distants sur un cercle

3.1 Préliminaire sur les valeurs rationnelles des fonctions trigonométriques

Dans le problème qui suit nous allons avoir besoin du résultat suivant (appelé théorème de Niven) :

Si $\theta \in \pi\mathbf{Q}$ *et* $\sin\theta \in \mathbf{Q}$*, alors* $\sin\theta \in \left\{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\right\}$

Comme $\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, remplacer sin par cos dans l'énoncé du théorème donne évidemment une formulation équivalente.

Voici une démonstration possible. Première chose : on note T_n les polynômes de Tchebychev de première espèce qui vérifient $T_n(\cos x) = \cos nx$. On a $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = X$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$ en écrivant l'identité $\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos(nx)\cos(x)$ on a $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$. Par récurrence triviale, T_n est donc un polynôme de degré n de coefficient dominant 2^{n-1} pour $n \geq 1$.

Si $\theta \in \pi\mathbf{Q}$, alors $\exists n \in \mathbf{N}^* : n\theta \in 2\pi\mathbf{Z}$, et alors $\cos n\theta = 1 \Rightarrow T_n(\cos\theta) - 1 = 0$. Si en plus, $\cos\theta \in \mathbf{Q}$, on peut écrire $\cos\theta = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ et $p \wedge q = 1$. Alors q divise forcément le coefficient dominant de $T_n - 1$ qui est 2^{n-1}, donc $\exists k \in \mathbf{N} : q = 2^k$.

Supposons par l'absurde que $k \geq 2$, cela entraîne que $2 \nmid p$ (car $2 \mid q$ et $p \wedge q = 1$) et en écrivant $q' = 2^{k-1}$ $(q = 2q')$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{2p^2 - q^2}{q^2} = \frac{p^2 - 2q'^2}{2q'^2}$$

cette écriture étant irréductible car p étant impair, le numérateur l'est et le dénominateur est une puissance de 2, c'est $2^{1+2(k-1)} = 2^{2k-1} > 2^k$ pour $k \geq 2$. Par récurrence la suite des $(\cos(2^m\theta))_{m\in\mathbf{N}}$ est une suite de rationnels dont la valuation 2-adique est strictement décroissante, elle dépasse éventuellement $-(n-1)$ d'où, en prenant $m \in \mathbf{N}$ réalisant cette condition,

$T_n(\cos 2^m\theta) - 1 \neq 0$. Or $\theta \in 2\pi\mathbf{Z} \Rightarrow 2^m\theta \in 2\pi\mathbf{Z} \Rightarrow \cos(2^m\theta) = 1$, c'est une contradiction.

Forcément $k \geq 1$. Le cosinus prenant des valeurs entre -1 et 1 on a $\cos\theta \in [-1,1] \cap \frac{1}{2}\mathbf{Z} = \left\{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\right\}$, ce qu'il fallait démontrer.

Maintenant que nous disposons de ce théorème, passons au sujet principal de cette section.

3.2 Le problème

Problème :
Peut-on placer, sur le cercle unité euclidien, 1975 points deux à deux rationnellement distants ?

Solution :
La réponse est affirmative.

Remarquons d'abord que pour 2 points séparés de l'angle θ sur le cercle unité, la distance (dans la métrique euclidienne) entre les 2 est de $2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$ (faire le dessin pour s'en convaincre).

Posons $\alpha = \arccos\frac{3}{5}$, on a évidemment $(\cos\alpha, \sin\alpha) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \in \mathbf{Q}^2$, et par récurrence triviale avec les formules de trigonométrie, $(\cos n\alpha, \sin n\alpha) \in \mathbf{Q}^2$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$. Considérons alors la famille de points repérée à partir d'un axe polaire quelconque (passant par le centre du cercle, *of course*) par les angles $2n\alpha$, $n \in \mathbf{N}$. Cette famille de points est telle que le demi-angle entre 2 points est toujours un multiple de α et a donc un sinus rationnel : les 2 points sont donc rationnellement distants.

Mais comme $\alpha \notin \pi\mathbf{Q}$ d'après le théorème du préliminaire la famille de points précédemment construite est infinie (dénombrable) donc contient 1975 points distincts, et même 2012 (qui, étant non seulement la date de la fin du monde mais contenant en plus un 12, a une supériorité numérologique incontestable), c'est donc une réponse au problème.

CQFD.

4 Et pour finir ...

4.1 Un truc bidon

Comme sin et cos sont la même fonction avec un déphasage de $\frac{\pi}{2}$,

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 x + \cos^2 x\, dx = \pi$$

d'où $\langle \sin x \rangle = \langle \cos x \rangle = \frac{1}{2}$. C'est plus joli qu'avec les formules de trigo...

4.2 Un exercice : l'inégalité de Wirtinger

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que

$$\int_0^1 f'(x)^2 \, dx \geq \pi^2 \int_0^1 f(x)^2 \, dx$$

Une démonstration de cette inégalité a fait l'objet d'un exercice de l'X (cf. Oraux X-ENS Analyse 2) avec une méthode tordue faisant intervenir les intégrales

$$I_1 = \int_0^1 f'(x) f(x) \mathrm{cotan}(\pi x) \, dx \ \text{ et } I_2 = \int_0^1 f(x)^2 (1 + \mathrm{cotan}^2(\pi x)) \, dx$$

mais il existe une façon bien plus naturelle d'obtenir le résultat (indication : Fourier).

4.3 2 exercices très difficiles (vus sur Internet)

1. Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné. Montrer que E peut être mis en bijection croissante avec $\mathbf{R}$ si et seulement si il vérifie les 4 propriétés suivantes :

(i) E est sans extrémité : $\forall a \in E, \exists (b,c) \in E^2 : b < a < c$

(ii) E est dense dans lui-même : $\forall (a,b) \in E^2, a < b \Rightarrow \exists c \in E : a < c < b$

(iii) E est séparable : il existe $S \subset E$ dénombrable tel que $\forall (a,b) \in E^2, \exists s \in S : a \leq s \leq b$

(iv) E est complet c'est-à-dire toute partie non vide majorée (resp. minorée) admet une borne supérieure (resp. inférieure)

2. On considère deux chemins continus reliant les côtés opposés d'un carré en restant dans le carré. Montrer que les deux chemins se coupent.