Constructibilité à la règle et au compas et extensions de corps

Lycée Pierre de Fermat, MPSI1 219

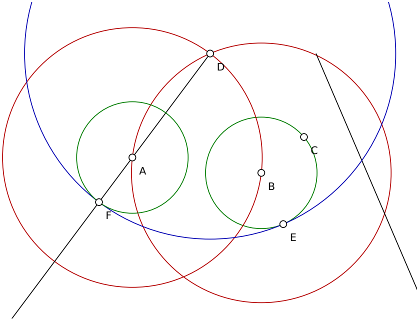
Exposé présenté le 15 juin 2012

Plan

Présentation du problème

- Construire des figures géométriques avec 2 outils : règle non graduée et compas
- On peut tracer des droites, des cercles, et. . .c'est tout
- Problème qui vient de l'antiquité grecque

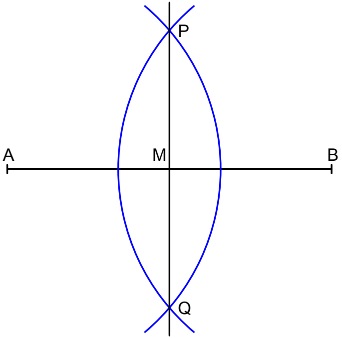
Rapporter des longueurs avec un compas...

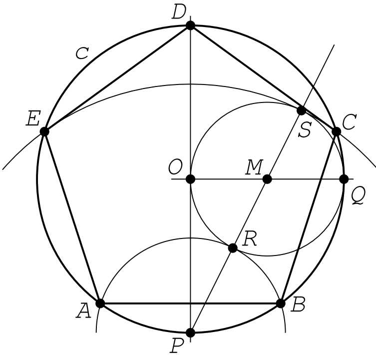


Que l'on autorise le compas à reporter des longueurs ou non, ça revient au même. La longueur $[BC]$ ci-contre a été reportée en A...

Ce qu'on sait faire depuis longtemps

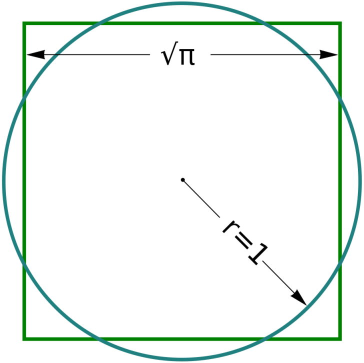
- Tracer une parallèle/perpendiculaire à une droite passant par un point, construire un triangle équilatéral, tracer une bissectrice ...
- Exemple : médiatrice (simple) et pentagone (moins simple)





Des problèmes plus difficiles, voire insolubles

- Construction de l'heptadécagone : découverte en 1796 par Gauss
- Les 3 grands problèmes de l'Antiquité
  - Duplication du cube
  - Quadrature du cercle
  - Trisection de l'angle



Des problèmes plus difficiles, voire insolubles

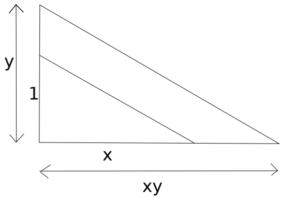
- En fait, ces 3 constructions sont impossibles à la règle et au compas !
- Preuve : 1837, théorème de Wantzel
- Comment ça marche ? Avec de l'algèbre !

Nombres constructibles

- On munit le plan d'un ROND
- On s'intéresse aux points constructibles à partir de $(0,0)$ et $(1,0)$
- Nombres constructibles
  - déf : coordonnées de points constructibles
  - x constructible $\Leftrightarrow$ $|x|$ longueur d'un segment constructible

Opérations sur les longueurs par construction géométrique

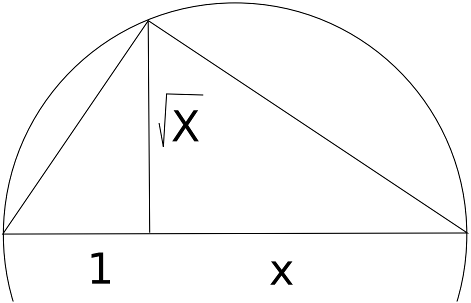
- On a 2 segments de longueur x et y
- On peut construire des segments de longueur :
  - $x + y$, $|x - y|$: évident
  - $x \times y$: cf ci-dessous
  - x/y : je vous laisse chercher...



- Les nombres constructibles forment un corps !

Une histoire de racine carrée. . .

- On peut prendre des racines carrées :



Une histoire de racine carrée...

- Idée : on ne peut pas « faire mieux »que les opérations précédentes
    - Droite : équation de degré 1
    - Cercle : équation de degré 2
- Racine carrée : OK ; racine cubique : pas OK
- Comment formaliser ça ? Avec les extensions de corps.

Extensions de corps : définitions

- L corps, $K \subset L$ sous-corps : L extension du corps K
- On s'intéresse aux propriétés de L relativement à K
- Notation : L/K pour désigner l'extension

Éléments algébriques de L sur K

- $\alpha \in L$
- déf : α algébrique sur $K \Leftrightarrow \exists P \in K[X] \backslash \{0\} \mid P(\alpha) = 0$
  - algébrique $\neq$ transcendant
- Polynôme minimal : engendre l'idéal des polynômes annulateurs
  - $\Pi_\alpha(\alpha) = 0$, Π_α irréductible

Extension de K par un élément

- Soit $\alpha \in L$, on note $K(\alpha)$ le plus petit sous-corps contenant K et α
- $K(\alpha) = \{R(\alpha) \mid R \in K(X)\}$
- α transcendant : $K(\alpha) \simeq K(X)$
- α algébrique : $K(\alpha) = K[\alpha]$, $\dim_K K(\alpha) = \deg \Pi_\alpha$

Extensions finies, degré

- déf : L/K extension finie $\Leftrightarrow$ L est un K-ev de dim finie
- degré de L/K : $[L:K] := \dim_K L$
- Multiplicativité du degré : pour $K \subset L \subset M$,
  - M/K finie $\Leftrightarrow$ L/K finie et M/L finie
  - $[M:K] = [M:L][L:K]$
- Remarque : α algébrique $\Leftrightarrow$ $K(\alpha)/K$ finie et $[K(\alpha):K] =$ degré de α.

Construction d'un point, extension quadratique

- On part de points dans K^2 où $\mathbf{Q} \subset K \subset \mathbf{R}$
- Pour obtenir un nouveau point, il faut qu'il soit l'intersection
  - (a) de deux droites
  - (b) d'une droite et d'un cercle
  - (c) de deux cercles
- Cas (a) : système linéaire, le nouveau point est dans K^2
- Cas (c) : se réduit au cas 2 en écrivant les équations

Construction d'un point, extension quadratique

- On se penche donc sur l'intersection d'un cercle et d'une droite : $\exists a, b, c, d, e, f \in K$ tels que

$$ax + by + c = 0 \quad (1)$$
$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 \quad (2)$$

- exprimer y en fct de x avec (2) puis substituer dans (1)...

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \in K$$

- et $\alpha \neq 0$: trinôme du 2nd degré

Construction d'un point, extension quadratique

- $P(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$; $P(x) = 0$
- si $x \notin K$, P irréductible $\Rightarrow P = \Pi_x$
- $[K(x) : K] = \deg P = 2$: extension quadratique

Construction d'une figure, tour d'extensions quadratiques

- On considère x constructible, et $x_1, \ldots, x_n$ coordonnées des points intermédiaires de la construction
- On a $\mathbf{Q} = K_0 \subset K_0(x_1) = K_1 \subset \ldots \subset K_{n-1}(x_n) = K_n$
- $\forall i, [K_{i+1} : K_i] = 1$ ou 2
- On extrait (L_j) tels que $L_0 \subsetneq L_0(x'_1) = L_1 \subsetneq \ldots \subsetneq L_{k-1}(x'_k) = L_k$
- $\forall j, [L_{j+1} : L_j] = 2$: tour d'extensions quadratiques

Théorème de Wantzel

- Énoncé : un nombre est constructible ssi il appartient à un corps L tel que $L/\mathbf{Q}$ soit décomposable en tour d'extensions quadratiques
- pour montrer le sens réciproque, utiliser "x constructible $\Rightarrow$ $\sqrt{x}$ constructible"
- Corollaire : un nombre constructible est algébrique et son degré est une puissance de deux

Retour sur les 3 grands problèmes de l'Antiquité

- La duplication du cube
  - Dupliquer le cube de côté 1 $\Rightarrow$ construire le nombre $\sqrt[3]{2}$
  - Or $X^3 - 2$ annulateur irréductible donc minimal
  - $[\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbf{Q}] = 3$ qui n'est pas une puissance de 2
  - La duplication du cube à la règle et au compas est impossible

Retour sur les 3 grands problèmes de l'Antiquité

- La trisection de l'angle
  - On sait construire un angle de $\dfrac{\pi}{3}$ (triangle équilatéral)
  - Si on pouvait trisecter, $\cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$ serait constructible
  - Or le polynôme minimal est $8X^3 - 6X - 1$!
  - Même argument que tout à l'heure...

Retour sur les 3 grands problèmes de l'Antiquité

- La quadrature du cercle
  - A partir du cercle de rayon 1, construire $\sqrt{\pi}$
  - Or π transcendant $\Rightarrow$ $\sqrt{\pi}$ transcendant
  - Tout nombre constructible est algébrique...