Exercice : Soit G un groupe *fini* et λ un automorphisme involutif dont le seul point fixe est le neutre 1_G. Montrer que G est abélien.

Indication : montrer que tout élément de G s'écrit sous la forme $\lambda(t)t^{-1}$.

Solution :

Posons $f(t) = \lambda(t)t^{-1}$ définie sur G. Tout d'abord f est injective. En effet si pour $(t, s) \in G^2$ on a $f(t) = f(s)$, alors on obtient $\lambda(s^{-1}t) = s^{-1}t \Rightarrow s^{-1}t = 1 \Rightarrow s = t$ puisque le seul point fixe de λ est 1. Comme G est fini, f est en fait une permutation de G, c'est une surjection ce qui montre l'indication.

Soit maintenant $x \in G$ quelconque, qu'on écrit sous la forme $x = \lambda(t)t^{-1}$. On a $\lambda(x) = \lambda^2(t)\lambda(t)^{-1}$ avec la propriété de morphisme, or $\lambda^2 = \mathrm{id}$ donc $\lambda(x) = t\lambda(t)^{-1} = (\lambda(t)t^{-1})^{-1} = x^{-1}$. Donc λ est l'inversion, ce qui permet d'affirmer que l'inversion est un morphisme.

On a donc pour $(x, y) \in G$:

$$xy = (y^{-1}x^{-1})^{-1} = \lambda(y^{-1}x^{-1}) = \lambda(y^{-1})\lambda(x^{-1}) = yx$$

G est donc abélien. $\square$

Quelques choses qu'on peut remarquer :

- Sous réserve d'existence, λ est unique : c'est l'inversion.
- Réciproquement si G est abélien l'inversion est toujours un automorphisme... mais peut avoir un point fixe autre que 1_G. En fait les points fixes de G à part le neutre sont les éléments d'ordre 2, lorsque G est fini il en existe ssi $|G|$ est pair. On a donc une caractérisation des groupes abéliens d'ordre impair.