Pourquoi les catégories sont la bonne façon de faire de la sémantique dénotationnelle

Lê Thành Dũng (Tito) Nguyễn — nltd@nguyentito.eu
Postdoc au LIP (ÉNS Lyon) dans l'équipe Plume (logique, automates...)

Séminaire du groupe ReFL (ex-Cercle Transcendantaliste) — 24 mars 2023

La sémantique catégorique aurait-elle mauvaise presse ?

Idées qu'on va remettre en cause :

- Les catégories semblent une façon lourde/compliquée de décrire des sémantiques dénotationnelles (types/termes $\mapsto$ structures mathématiques)
  - de toute façon les diagrammes commutent toujours, à quoi bon les vérifier…
- Idée de primauté de la dynamique (β-réduction, « niveau -3 ») sur la sémantique : citation du *Point Aveugle* de Girard (ch. 7)

  Layer -2 rests upon commutative diagrams, which express the functional equations [...] ; this is a bias, since, as in George Orwell's Animal Farm, *one side is more commutative than the other.*

La sémantique dénotationnelle à l'ancienne

$$\text{Type } A \rightsquigarrow \text{structure mathématique } [\![A]\!]$$
$$\text{Terme } t : A \rightsquigarrow \text{«élément» } [\![t]\!] \in [\![A]\!]$$

de sorte que la fonction de dénotation $[\![-]\!]$ soit *invariante* :

$$t =_\beta u \implies [\![t]\!] = [\![u]\!]$$

Ex : λ-calcul simplement typé (STLC) $\rightsquigarrow$ interprétation ensembliste naïve
système F $\rightsquigarrow$ domaines de Scott (Coquand, Gunter, Winskel 1989)[1]
$\to$ article qui passe beaucoup de temps à définir $[\![-]\!]$ et vérifier que ça marche,
parce qu'il est antérieur à la bonne notion catégorique («λ2-fibration»)

[1] Inspiré par le modèle des espaces de cohérence (*The system F 15 years later*, Girard 1986)

Compositionnalité

On veut généralement aussi que $\llbracket - \rrbracket$ soit *compositionnelle* :

$$\llbracket t\ u \rrbracket = \llbracket t \rrbracket(\llbracket u \rrbracket) \text{ et autres équations du genre}$$

$\rightarrow$ forcément, $\llbracket - \rrbracket$ peut être défini par induction sur la syntaxe,
en reflétant des opérations internes (application, ...) à « l'univers d'arrivée »

Ex : modèles extensionnels de STLC **(cf. Amadio–Curien chapitre 4)**

- structure applicative : $A \mapsto \llbracket A \rrbracket$ tel que $\llbracket A \to B \rrbracket \subseteq (\llbracket A \rrbracket \to \llbracket B \rrbracket)$
- on définit alors inductivement $\llbracket \Gamma \vdash t : A \rrbracket_\rho$,

$$\text{par ex. } \llbracket \Gamma \vdash t\ u : B \rrbracket_\rho := \llbracket \Gamma \vdash t : A \to B \rrbracket_\rho(\llbracket \Gamma \vdash u : A \rrbracket_\rho)$$

marche pour le modèle ensembliste, et pour les domaines (fonctions continues)

$\rightarrow$ on peut prouver par induction que $\llbracket - \rrbracket$ est invariant « une fois pour toute »

Modèles non-extensionnels

Modèle extensionnel typique : types $\rightsquigarrow$ ensembles + structure
termes $\rightsquigarrow$ fonctions préservant la structure

Des sémantiques *intensionnelles* qui ne rentrent pas dans ce schéma :

- comptage de ressources $\to$ sémantiques quantitatives (par ex. $\mathsf{Rel}_!$)
- *dynamique* du calcul : sémantique des jeux – et un de leurs ancêtres, les « algorithmes séquentiels » de Berry et Curien

$\to$ pousse Berry (*On the Definition of Lamba-Calculus Models*, 1981) à défendre une proposition de Lambek (*Deductive systems and categories III*, 1972) :

modèle de STLC = catégorie cartésienne close (CCC) + types de base $\mapsto$ objets

Remarque : pas d'antagonisme catégories vs dynamique !

Des structures ensemblistes aux catégories

Passage des ensembles structurés + fonctions préservant la structure
aux catégories = « objets » (pas forcément ensembles) + $\underbrace{\text{« flèches »}}_{\text{ou « morphismes »}}$ composables

Parallèle avec les maths pures (algèbre / topologie) :

- les structures algébriques chez Bourbaki : ensembles munis de ...
- passer aux catégories est fructueux en maths (homotopie, schémas, ...)

Remarque : modèles extensionnels $\simeq$ CCC « bien pointées »

$$\forall f, g \in \mathcal{C}(X, Y),\ (\forall h \in \mathcal{C}(1, X),\ f \circ h = g \circ h) \implies f = g$$

i.e. le foncteur $\mathcal{C}(1, -) \colon \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ est fidèle

Une emphase sur la structure algébrique intrinsèque

On aurait pu dire : un modèle (intensionnel) de STLC est donné par :

- pour chaque type A un ensemble $[\![A]\!]$ de dénotations possibles
  mais $[\![A \to B]\!] \not\subset$ (fonctions ensemblistes $[\![A]\!] \to [\![B]\!]$) en général
- des opérations telles que $\mathtt{app}_{A,B} : [\![A \to B]\!] \times [\![A]\!] \to [\![B]\!]$, avec divers axiomes

et ça aurait marché ! Les CCC = mêmes $[\![-]\!]$ à la fin, *un point de vue* différent :

un modèle = un univers admettant une *structure intrinsèque* permettant
de refléter les opérations du langage source

La structure de CCC a un intérêt en soi :
clôture cartésienne = existence d'espaces de fonctions = utile partout en maths
et l'interprétation de STLC en découle mécaniquement

Initialité

Le λ-calcul simplement typé induit lui-même une *catégorie syntaxique* STLC :

- objets : types
- morphismes de A dans B : termes clos de type $A \to B$ modulo $=_{\beta\eta}$

Expression catégorique de l'interprétation de STLC : propriété d'initialité

STLC est une CCC, et pour toute autre CCC $\mathcal{C}$, il existe un foncteur $[\![-]\!] : \mathsf{STLC} \to \mathcal{C}$ préservant la structure de CCC.

Un tel foncteur est *unique* (dès qu'on a fixé $[\![o]\!]$ pour chaque type de base o)

$\longrightarrow$ STLC vérifie une propriété universelle qui la caractérise à équivalence près

$\longrightarrow$ montre que le λ-calcul simplement typé muni des règles β/η est un objet mathématique canonique (même sans parler d'informatique)

Syntaxe vs sémantique

Récap : les catégories cartésiennes closes sont « naturelles » en maths
STLC modulo $=_{\beta\eta}$ donne (une construction de) la CCC initiale

$\longrightarrow$ Justifie la canonicité du λ-calcul simplement typé...
mais seulement avec β/η vues comme des *égalités*. Hot take :

$$=_{\beta} \text{ est plus fondamentale que } \to_{\beta}$$

En λ-calcul de base, on aime bien $\to_{\beta}$: confluence + normalisation (avec typage)
$\implies$ les formes normales sont des représentants canoniques de classes de $=_{\beta}$

L'exemple de STLC avec sommes

On considère le λ-calcul simplement typé avec type somme « $+$ »

$\longrightarrow$ connecteur positif : galère pour la syntaxe

- La règle η forte $C[t] =_\eta \texttt{case}\ t\ \{\texttt{inl}(x) \mapsto C[\texttt{inl}(x)] \mid \texttt{inr}(y) \mapsto C[\texttt{inr}(y)]\}$ reflète la prop. univ. d'un coproduit catégorique ; comment l'orienter ?
- $=_\beta$ et $=_\eta$ simples à écrire, on sait ce qu'on veut ; mais pas de $\to_\beta \cup \to_\eta$ confluent
- Solutions non-triviales :
  - réécriture avec plein de règles additionnelles (Lindley 2007)
  - ou bien *normalization by evaluation* : interpréter dans une sémantique puis extraire des formes normales canoniques !

    $\to$ technique répandue dans le monde des types dépendants / homotopiques par ex. normalisation de TT cubique (Sterling & Angiuli)

Attention : que veut-on exiger sur la sémantique ?

Sémantique de STLC + récursivité générale (Y) + type somme ?

- Lawvere 1969 : CCC + points fixes + coproduits $\implies$ dégénerescence
  (i.e. la catégorie est forcément un préordre)
  autrement dit : STLC + Y + sommes avec η forte $\implies$ inconsistant
- Les domaines interprètent STLC + Y + sommes faibles (seulement β)
- En Haskell, `Either` n'est pas un vrai coproduit… est-ce grave ?

Autre exemple : la logique classique est dégénerée (Joyal)
$\longrightarrow$ plusieurs façons de restreindre la théorie équationnelle
(e.g. contrôle de l'ordre d'évaluation pour gérer l'effet de bord de `call`/`cc`)

Par contre, c'est rare que modèle de STLC $\neq$ CCC
(sauf les modèles *bi*catégoriques – déf rigoureuse très récente)

Le cas de la logique linéaire

- Syntaxe pénible à manier $\to$ quelle théorie équationnelle ?

  C'est les catégories qui vont nous guider vers la bonne notion de modèle !

- Exigence : refléter la traduction « appel par nom » $!A \multimap B$ de STLC vers LL

  $\longrightarrow$ on veut que ! soit une comonade dont la cat. de Kleisli soit une CCC

- Plusieurs notions (Seely, adjonctions LNL, ...) équivalentes
- Les diagrammes méritent d'être vérifiés !
  - Rel avec ! qualitatif : la dérélection n'est pas naturelle
  - jeux de Blass pour MALL : composition non associative

    ($\Rightarrow$ inspiration des jeux concurrents)
  - d'autres exemples anecdotiques (e.g. fibrations d'automates de Riba

    $\longrightarrow$ presque un modèle de MELL, mais pas tout à fait)